Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Enseñanza de las cónicas y los lugares geométricos en 1º de bachiller

Miguel Mendia Betelu

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar la actuación docente en la didáctica de las cónicas y los lugares geométricos en 1º de bachiller.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre los lugares geométricos y las cónicas, que se ha puesto en marcha en un aula de 1º de bachiller en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I: Los lugares geométricos y las cónicas en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de los lugares geométricos y las cónicas en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a los lugares geométricos y las cónicas en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 1º de bachiller, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1: Lugares geométricos y cónicas en el currículo vigente

En este primer va a analizarse el contenido de lugares geométricos y cónicas que hay en el currículo oficial para educación Primaria, Secundaria y bachillerato.

Estos contenidos aparecen recogidos en los siguientes Boletines Oficiales del Estado:

- Educación Primaria: B.O.E. número 293, concretamente el Real Decreto 1513/2006.
- Educación Secundaria Obligatoria: B.O.E. número 5, Real Decreto 1631/2006.
- Bachillerato: B.O.E. número 266, Real Decreto 1467/2007.

Para facilitar la comprensión y análisis se han agrupado los contenidos en tres grupos: Educación Primaria, Secundaria y Bachiller.

Dado la especificidad del tema tratado y el curso en el que seda, cobra especial importancia una adecuada elección de una serie de descriptores que permitan al lector hacer un análisis más efectivo de la presencia en el currículo de contenidos matemáticos relacionados con los lugares geométricos y las cónicas. Así pues se han escogido los siguientes descriptores:

- Distancias, paralelismo, perpendicularidad: son necesarias estas nociones como tales para poder llegar a los lugares geométricos.
- La circunferencia y las cónicas: la circunferencia es la cónica más utilizada y se introduce en cursos muy tempranos.
- Lugares geométricos. Propiedades geométricas: el descriptor al que más atención se va a prestar.

Se consideró la posibilidad de considerar otros descriptores tales como el uso de tecnologías, la resolución de problemas, la parametrización algebraica y la representación gráfica, que inevitablemente aparecen en la didáctica de las cónicas. Sin embargo, dicho análisis desechó por el riesgo de enmarañar el estudio de las cónicas y su sentido geométrico como tal.

A partir del 4º curso de la E.S.O. este análisis sólo se efectuará sobre la modalidad A de 4º de E.S.O. y las asignaturas de Matemáticas I y Matemáticas II dentro del programa de Bachillerato de Ciencias y Tecnología. La geometría desaparece de los contenidos de las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales casi por completo. La única referencia a la misma viene dada mediante la interpretación geométrica de la pendiente.

1.1. Contenidos en primaria:

Descriptor	Primaria Tercer ciclo
Distancias, paralelismo y perpendicularidad.	Bloque 3. Geometría La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros. • Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros...
Circunferencia. Cónicas	Bloque 3. Geometría Formas planas y espaciales. • Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición. • Interés por la precisión en la descripción y representación de formas geométricas.
Lugares geométricos. Propiedades geométricas	Bloque 3. Geometría La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros. Regularidades y simetrías.

Tabla 1: Contenidos en primaria relacionados con los descriptores de cónicas y lugares geométricos

1.2. Contenidos en E.S.O.:

Descriptor	E.S.O. Primer ciclo	
	1º E.S.O.	**2º E.S.O.**
Distancias, paralelismo y perpendicularidad.	Bloque 4. Geometría. Elementos básicos para la descripción de las figuras geométricas en el plano. Utilización de la terminología adecuada para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico. Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad. Empleo de métodos inductivos y deductivos para analizar relaciones y propiedades en el plano. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz.	Bloque 4. Geometría. Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.
Circunferencia. Cónicas	Bloque 4. Geometría. Polígonos regulares. La circunferencia y el círculo. Construcción de polígonos regulares con los instrumentos de dibujo habituales.	Bloque 4. Geometría. Poliedros y cuerpos de revolución.
Lugares geométricos. Propiedades geométricas.	Bloque 4. Geometría. Elementos básicos para la descripción de las figuras geométricas en el plano. Utilización de la terminología adecuada para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones el mundo físico. Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad. Empleo de métodos inductivos y deductivos para analizar relaciones y propiedades en el plano. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz.	Bloque 4. Geometría. Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.

Tabla 2: Contenidos en el primer ciclo de E.S.O. relacionados con los descriptores de cónicas y lugares geométricos

Descriptor	E.S.O. Segundo ciclo		
	3º E.S.O.	**4º E.S.O. - A**	**4º E.S.O. - B**
Distancias, paralelismo y perpendicularidad.	Bloque 4. Geometría. Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.	Bloque 4. Geometría. Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana.	Bloque 4. Geometría. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
Circunferencia. Cónicas	Bloque 4. Geometría. Poliedros y cuerpos de revolución.	---	---
Lugares geométricos. Propiedades geométricas	Bloque 4. Geometría. Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.	Bloque 4. Geometría. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana. Utilización de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.	---

Tabla 3: Contenidos en el segundo ciclo de E.S.O. relacionados con los descriptores de cónicas y lugares geométricos

1.3. Contenidos en Bachillerato:

Descriptor	Bachillerato Ciencias 1º	Bachillerato Ciencias 2º
Distancias, paralelismo y perpendicularidad.	2. Geometría: Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.	2. Geometría: Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
Circunferencia. Cónicas	2. Geometría: Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas.	
Lugares geométricos. Propiedades geométricas	2. Geometría: Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas.	2. Geometría: Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

Tabla 4: Contenidos en Bachillerato relacionados con los descriptores de cónicas y lugares geométricos

Capítulo 2: Criterios de evaluación de lugares geométricos y cónicas en el currículo vigente

En el capítulo segundo de esta primera parte se recogen los criterios de evaluación que figuran para el tema de lugares geométricos y cónicas para los descriptores seleccionados. Nuevamente han sido extraídos de los Reales Decretos 1513/2006, 1631/2006 y 1467/2007.

2.1. Criterios de evaluación en primaria:

Descriptor	Primaria
	Tercer ciclo
Distancias, paralelismo y perpendicularidad.	5. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. En este criterio es importante detectar que los estudiantes han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información. Se evaluará si dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas, en particular si son utilizados en la resolución de problemas geométricos del entorno.
Circunferencia. Cónicas	---
Lugares geométricos. Propiedades geométricas	6. Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.

Tabla 5: Criterios de evaluación en el tercer ciclo de primaria relacionados con los descriptores de cónicas y lugares geométricos

2.2. Criterios de evaluación en E.S.O.:

Descriptor	E.S.O. Primer ciclo	
	1º E.S.O.	2º E.S.O.
Distancias, paralelismo y perpendicularidad.	5. Estimar y calcular perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando la unidad de medida adecuada. Se pretende valorar la capacidad de estimar algunas medidas de figuras planas por diferentes métodos y de emplear la unidad y precisión más adecuada. Se valorará también el empleo de métodos de descomposición por medio de figuras elementales para el cálculo de áreas de figuras planas del entorno.	4. Estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con una precisión acorde con la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada. Mediante este criterio se valora la capacidad para comprender y diferenciar los conceptos de longitud, superficie y volumen y seleccionar la unidad adecuada para cada uno de ellos. Se trata de comprobar, además, si se han adquirido las capacidades necesarias para estimar el tamaño de los objetos. Más allá de la habilidad para memorizar fórmulas y aplicarlas, este criterio pretende valorar el grado de profundidad en la comprensión de los conceptos implicados en el proceso y la diversidad de métodos que se es capaz de poner en marcha.

Tabla 6: Criterios de evaluación en el primer ciclo de la E.S.O. relacionados con los descriptores de cónicas y lugares geométricos (Sigue)

Descriptor	E.S.O.	
	Primer ciclo	
	1º E.S.O.	2º E.S.O.
Circunferencia. Cónicas	4. Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende evaluar también la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas.	
Lugares geométricos. Propiedades geométricas	4. Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada. Se pretende comprobar la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende evaluar también la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas.	

Tabla 7: Criterios de evaluación en el tercer ciclo de primaria relacionados con los descriptores de cónicas y lugares geométricos (Cont.)

<table>
<tr><th rowspan="3">Descriptor</th><th colspan="3">E.S.O.</th></tr>
<tr><th colspan="3">Segundo ciclo</th></tr>
<tr><th>3º E.S.O.</th><th>4º E.S.O. - A</th><th>4º E.S.O. - B</th></tr>
<tr><td>Distancias, paralelismo y perpendicularidad.</td><td>4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias composiciones y analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

Con este criterio se pretende valorar la comprensión de los movimientos en el plano, para que puedan ser utilizados como un recurso más de análisis en una formación natural o en una creación artística. El reconocimiento de los movimientos lleva consigo la identificación de sus elementos característicos: ejes de simetría, centro y amplitud de giro, etc. Igualmente los lugares geométricos se reconocerán por sus propiedades, no por su expresión algebraica.

Se trata de evaluar, además, la creatividad y capacidad para manipular objetos y componer movimientos para generar creaciones propias.</td><td>4. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales.

Se pretende comprobar el desarrollo de estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición Propuesta.</td><td>3. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales.

Se pretende comprobar la capacidad de desarrollar estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición Propuesta.</td></tr>
<tr><td>Circunferencia. Cónicas</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Lugares geométricos. Propiedades geométricas</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 8: Criterios de evaluación en el segundo ciclo de E.S.O. relacionados con los descriptores de cónicas y lugares geométricos

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato:

Descriptor	Bachillerato	
	Ciencias	
	1º	2º
Distancias, paralelismo y perpendicularidad.	3. Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en dos dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones. La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el plano.	3. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis y combinarlas adecuadamente.
Circunferencia. Cónicas	Criterio 3	

Tabla 9: Criterios de evaluación en Bachillerato relacionados con los descriptores de cónicas y lugares geométricos (Sigue)

Descriptor	**Bachillerato**	
	Ciencias	
	1º	**2º**
Lugares geométricos. Propiedades geométricas	2. Transferir una situación real a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de resolución de triángulos para enunciar conclusiones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real; así como, identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano, analizar sus propiedades métricas y construirlos a partir de ellas. Se pretende evaluar la capacidad para representar geométricamente una situación planteada, eligiendo y aplicando adecuadamente las definiciones y transformaciones geométricas que permitan interpretar las soluciones encontradas; en especial, la capacidad para incorporar al esquema geométrico las representaciones simbólicas o gráficas auxiliares como paso previo al cálculo. Asimismo, se pretende comprobar la adquisición de las capacidades necesarias en la utilización de técnicas propias de la geometría analítica para aplicarlas al estudio de las ecuaciones reducidas de las cónicas y de otros lugares geométricos sencillos.	

Tabla 10: Criterios de evaluación en Bachillerato relacionados con los descriptores de cónicas y lugares geométricos (Cont.)

Capítulo 3: Ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre lugares geométricos y cónicas en los libros de texto

Este capítulo contiene un análisis de los ejercicios, problemas y cuestiones presentes en los libros de texto que se usan a diario en el centro en el que el desarrollé mi práctica docente. Los cursos analizados son los dos cursos del segundo ciclo de la ESO y los dos de Bachillerato, dentro de la modalidad de ciencias, dado que en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales no figuran las cónicas ni los lugares geométricos en ningún momento.

Como el tema tratado no se da como tal hasta 1º de bachiller, la selección de ejercicios, problemas y cuestiones tipo realizada se ha hecho por los diversos temas que tratan los descriptores analizados en los dos capítulos precedentes. Para facilitar su búsqueda al lector se detalla con sub-'sub-secciones' el tema del cual ha sido extraído el ejercicio/problema/cuestión en cuestión, valga la redundancia.

En 4º E.S.O. sólo se analiza la opción A. Y en el bachiller sólo se analizan libros de la opción de ciencias.

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO

Los siguientes ejercicios están seleccionados de los temas 8 y 9 del libro de Matemáticas 3º E.S.O. de la editorial McGraw Hill.

Aunque los temas dedicados a la geometría son el 9, 10 y el 11, que son geometría en el plano, movimientos en el plano y cuerpos geométricos respectivamente, un ejercicio se ha tomado del capítulo 8, funciones lineales y el resto del 9.

3.1.1. Extraídos del tema 8: funciones lineales

Actividad tipo: ☒Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Aunque este ejercicio no sea ni de cónicas ni de lugares geométricos, es uno de los primeros que se plantea a los estudiantes que requiere, por llamarlo de alguna manera, entendimiento geométrico. Para resolverlo no es preciso resolver (a estas alturas ya de manera mecánica) el sistema de ecuaciones, sino que puede hacerse previo entendimiento de la relación de la recta en el plano con su pendiente y su ordenada en el origen.

Ejemplo:

13 Dadas las rectas:

$$r: 3x - 2y = -1$$

$$s: 6x + y = 2$$

a) Estudia su posición relativa.

b) Representa las dos rectas en el mismo sistema de coordenadas cartesianas.

3.1.2. Extraídos del tema 9: geometría en el plano

Actividad tipo: ☒Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Este es un ejercicio muy sencillo en el que se aplica el teorema de Pitágoras. Sin embargo no basta con sustituir en la fórmula, sino que hay que razonar un poco a partir de la misma.

Ejemplo:

Ejercicios

15 ¿El triángulo cuyos lados miden 12, 13 y 5 cm es un triángulo rectángulo?

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Aunque no lo explicita, este es un ejercicio a realizar con regla y compás. Hacerlo algebraicamente supera con creces el nivel exigido en 3º de E.S.O. Sin embargo, en este ejercicio aparece de manera natural la idea de circunferencia como lugar geométrico mediante la última pregunta.

Ejemplo:

23 Desde el punto $P(-5, 0)$ traza las rectas tangentes a la circunferencia de centro $C(3, 2)$ y radio 3. ¿Cuál es la longitud del segmento que une el punto P con los puntos de tangencia?

Actividad tipo: ☒Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Los puntos notables del triángulo son una manera estupenda de acercase a los lugares geométricos pues aúnan propiedades geométricas como las distancias con la sencillez de representación. Nuevamente se pide una resolución gráfica, con regla y compás, pero es uno de los pocos ejercicios en los que a estas alturas aparece la noción de lugar geométrico.

Ejemplo:

20 Dibuja la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(4, -2)$, $B(9, -1)$ y $C(1, 2)$. (Utiliza instrumentos de dibujo.)

3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO

Los ejercicios extraídos para el curso de 4º de la E.S.O. opción A son del libro de matemáticas para dicho curso de la editorial Editex. Contiene 3 temas con contenidos geométricos: el tema 8 de áreas y volúmenes, el tema 9 de trigonometría y el tema 10 de vectores. Los 5 ejercicios seleccionados son del tema 10. Aunque en el capítulo 8 se trata el teorema de Pitágoras y algunas aplicaciones, no se han considerado 'útiles' sus ejercicios para con el resto del trabajo.

3.2.1. Extraídos del tema 10: vectores

Actividad tipo: ☒Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Aunque no se suele considerar como tal, la recta en sí misma también puede verse como un lugar geométrico: pasando por un punto, todos sus puntos están alineados. Además es una de las piezas base en el tema de cónicas y lugares geométricos. Este tipo de ejercicios contribuyen a que el alumno se familiarice con las rectas y sus ecuaciones en el plano.

Ejemplo:

ACTIVIDADES

10. Determina la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $P = (4, -1)$ con pendiente -2. Indica tres puntos de dicha recta.

Actividad tipo: ☒Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Toda recta puede determinarse con dos puntos. Suena trivial, y lo es; pero muchos alumnos calculan 3 ó más a la hora de dibujar funciones lineales. Además este ejercicio fuerza al alumno a seguir una serie de pasos previos para lograr la resolución.

Ejemplo:

■ 47. Determina la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(3, -1)$.

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Este problema obliga al alumno a usar la noción de vector director. Primero para averiguarlo y segundo para deducir una propiedad de las rectas a partir de los mismos.

Ejemplo:

49. Dadas las siguientes rectas, determina:

$$r \equiv x - 3y + 1 = 0 \qquad s \equiv 5x - y + 8 = 0$$

a) Los vectores directores de r, s.

b) ¿Son paralelos sus vectores directores?

c) ¿Son paralelas las rectas r, s?

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Se está pidiendo el punto medio. En realidad, en el plano hay infinitos puntos medios dados dos puntos A y B (la mediatriz). El alumno, cuando se le pregunta por primera vez, sólo ve el que está alineado. Este es un bonito problema para este nivel.

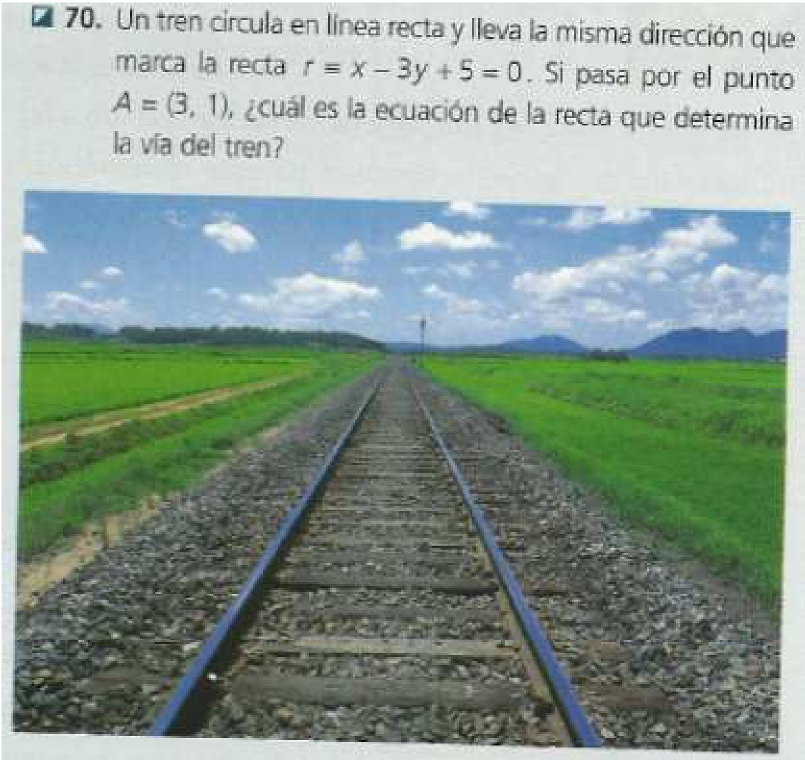
Ejemplo:

66. Dados dos puntos $A = (1, 4)$ y $B = (6, -3)$ encuentra un punto alineado con A y B que se encuentre a la misma distancia de A y de B.

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Por fin un problema de 'letra' en el que no se explicita lo que se quiere preguntar. Y por una ilustración que se incorpora, esta es más perjudicial que aclaratoria. Están pidiendo una recta paralela y no hace falta una foto, en la que las proyecciones de las paralelas parece que se cortan en el horizonte, para ilustrarlo.

Ejemplo:


70. Un tren circula en línea recta y lleva la misma dirección que marca la recta $r \equiv x - 3y + 5 = 0$. Si pasa por el punto $A = (3, 1)$, ¿cuál es la ecuación de la recta que determina la vía del tren?

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachiller Ciencias

Los siguientes ejercicios, problemas y cuestiones han sido seleccionados del libro de matemáticas de 1º de bachiller de la editorial McGraw Hill. Este es el único curso (y por lo tanto libro) en el que los lugares geométricos y las cónicas son tratados como tal en la unidad 11.

Más adelante se comentará lo qué es el aprendizaje en espiral y cómo se lleva a cabo en la práctica. El currículo lo contempla y está patente en muchos libros. En particular en este también, y por eso hay ejercicios, problemas y cuestiones relacionadas con los lugares geométricos y las cónicas en otras unidades que se han seleccionado en este análisis. En particular se han seleccionado 3 de la unidad 10.

Llama la atención la 'poca letra' presente en los ejercicios/problemas/cuestiones del tema. Precisamente los lugares geométricos están tremendamente presentes en el mundo cotidiano y la presencia de problemas contextualizados en el libro de texto en los que el alumno tenga que buscar matemáticas en la realidad sería un aliciente estupendo. Sin embargo, todos los enunciados buscan o una recta, o un lugar geométrico dado, o una posición relativa…

3.3.1. Extraídos del tema 10: Geometría analítica.

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Este problema es muy completo pues requiere conocer qué es un paralelogramo, manejo de rectas en el plano y comprende bien sus posiciones relativas. Para resolverlo es preciso que el estudiante lo dibuje, mediante un croquis, en el papel y fije una serie de pasos para su resolución. Hasta ahora, siempre que había paralelogramos u otras figuras planas se pedía el cálculo del área, perímetro… mediante el empleo de fórmulas. En este caso hay que conocer las propiedades geométricas que cumplen sus lados para resolverlo. Plantea un conflicto al alumno.

Ejemplo:

2> Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos $A(1, -3)$, $B(2, 2)$ y $C(-3, 0)$. Calcula las coordenadas del cuarto vértice.

R: $D(-4, -5)$

Actividad tipo: ☒Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Ejercicio tipo de posición relativa entre rectas. A estas alturas es más que deseable que el alumno no lo resuelva mediante la resolución del sistema de ecuaciones, sino que lo haga previo cálculo de la pendiente y la ordenada en el origen y razonando sobre estas. Un punto positivo de este ejercicio es que salen todos los casos posibles de posiciones relativas entre rectas en el plano.

Ejemplo:

17> Estudia la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:

a) $r: 2x - y + 5 = 0$, $s: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{1}$

b) $r: x + 2y + 2 = 0$, $s: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{-2}$

c) $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 5\lambda \end{cases}$, $s: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-5}$

d) $r: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{-3}$, $s: 3x + y = 0$

e) $r: x - y + 2 = 0$, $s: x - 2y + 3 = 0$

R: a) Se cortan en $P(-1, 3)$; b) Paralelas; c) Coincidentes; d) Paralelas; e) Se cortan en $P(-1, 1)$.

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Esto ya es un problema en condiciones que requiere saber qué es un cuadrado, reconocer sus elementos, el empleo de distancias y la manipulación algebraica de todos estos conceptos. Es quizás un problema demasiado exigente para dentro de la unidad de geometría analítica, aunque al mismo tiempo una manera estupenda de entrar al tema de lugares geométricos. Aunque el enunciado es bastante explícito, el alumno tiene que leerlo con cuidado e interpretarlo adecuadamente.

Ejemplo:

44> Un cuadrado tiene una diagonal sobre la recta $2x - y + 3 = 0$. Uno de sus vértices es el punto $A(2, 2)$. Halla los otros vértices y la longitud de la diagonal.

R: $(-2, 4)$, $(1, 5)$, $(-1, 1)$; diagonal $= \sqrt{20}$.

3.3.2. Extraídos del tema 11: Lugares geométricos. Cónicas

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Podría dudarse en clasificar esté problema como ejercicio o no. La experiencia demuestra que es un problema en toda regla. El alumno tiene que aplicar y generalizar el concepto de distancia punto-punto y el de distancia punto-recta. Saber hacer esto algebraicamente es la base para poder resolver matemáticamente problemas de lugares geométricos. Conviene dar la ecuación general de la recta (como es el caso) porque no hacerlo es una variable didáctica considerable.

Ejemplo:

1> Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $A(2, -3)$ y de la recta r: $x - 2y - 1 = 0$.

R: $4x^2 + y^2 + 4xy - 18x + 26y + 64 = 0$.

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☐Problema ☒Cuestión ☐Situación

Descripción: A pesar de que el resultado sea tangente, esto es lo que menos interesa de esta cuestión. Aquí se plantea al alumno pensar, y no sólo una forma de resolverlo sino dos. Que el alumno se enfrente y entienda este problema es muy positivo.

Ejemplo:

21> Idea dos métodos diferentes que permitan decidir si la recta $4x + 3y - 8 = 0$ es exterior, tangente o secante a la circunferencia $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$. Razona la respuesta.

PAU

R: Es tangente

Actividad tipo: ☒Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Ejercicio tipo de emplear la ecuación canónica de la elipse. No es preciso entender qué es un lugar geométrico para su resolución. Tan sólo requiere conocer las fórmulas y un manejo algebraico básico.

Ejemplo:

29> Halla la ecuación reducida de las siguientes elipses:
a) distancia focal 4 y semieje menor 3,
b) semidistancia focal 3 y eje mayor 10,
c) pasa por el punto (8, 3) y su excentricidad es $\frac{\sqrt{3}}{2}$,
d) pasa por (−4, 1) y eje menor 6,
e) pasa por (3, 1) y (0, 2).

R: a) $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; c) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$; d) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$; e) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Este es un problema que aunque a priori pueda resultar fácil, su resolución puede resultar muy pesada en una clase de 1º de bachiller. Conviene resolverlo antes de llevarlo a clase y de todas formas puede liar más que ayudar. Si se quiere hacer problemas de posiciones relativas de rectas y otras relaciones en el plano, mejor que sean con circunferencias, que ayudan al alumno a entender mejor qué es un lugar geométrico en vez de confundirle con manipulaciones algebraicas, discriminantes, …

Ejemplo:

52> Halla la ecuación de la tangente y de la normal a la parábola $(x-1)^2 = 2(y-2)$ en el punto $P(3, 4)$.

R: Tangente, $2x - y - 2 = 0$; normal, $x + 2y - 11 = 0$.

3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º Bachiller Ciencias

Los ejercicios de 2º de Bachillerato han sido extraídos del libro de matemáticas de la editorial Edebé. Dicho libro dedica 5 temas a la geometría; 2 de ellos a los vectores en el espacio, uno a la geometría afín, otro a la geometría métrica y un último tema de curvas y superficies que en opinión del autor se va un poco de los objetivos. Los ejercicios/problemas/cuestiones han sido extraídos de estos tres últimos temas.

En este libro no se vuelve a hacer mención explícita de lo qué es un lugar geométrico. Tampoco hay ni rastro de cónicas entendiéndolas como lugares geométricos.

3.4.1. Extraídos del tema 6: geometría afín

Actividad tipo: ☒Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Ejercicio tipo de 2º de bachiller. Dos posibles vías de resolución. Una primera sería tratar de resolver el sistema para lo que no haría falta el empleo de la geometría como tal. La otra vía, la deseable, consiste en hacerlo matricialmente, entendiendo la recta como intersección de dos planos, su vector director… Supone un escalón superior tras la resolución de este mismo tipo de ejercicios en el plano.

Ejemplo:

24. Determina la posición relativa de r y r' en cada caso:

a) $r: \begin{cases} 3x-y-21=0 \\ 5y-3z-3=0 \end{cases}$ $\quad r': \begin{cases} 3x-y-1=0 \\ 5x-2z-10=0 \end{cases}$

b) $r: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+3}{6} = \dfrac{z-1}{4}$

$r': (x, y, z) = (3, -3, 1) + k\,(1, -3, -2)$

Actividad tipo: ☒Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Otro ejercicio similar. En cierto modo, lograr una buena comprensión de los lugares geométricos en 1º de bachiller puede hacer al alumno afrontar estos problemas con una mayor tranquilidad.

Ejemplo:

31. Indica la posición relativa de las siguientes rectas y planos respecto de los ejes y planos de referencia:

a) $\begin{cases} x - z - 5 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $y = 0$

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

d) $x = 3$

e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + k \\ z = 1 \end{cases}$

f) $3z = -5$

g) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

h) $5y - 2x = 0$

3.4.2. Extraídos del tema 7: geometría métrica

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Si en 1º se calculaba la distancia punto-recta ahora se pasa a la distancia punto-plano. Además luego se pide un plano paralelo, es decir, un lugar geométrico. Este es un buen problema.

Ejemplo:

23. Calcula la distancia del plano π al origen de coordenadas.

$$\pi: 3x + y - 5z - 17 = 0$$

— Escribe la ecuación de un plano paralelo al anterior pero situado a una unidad del origen de coordenadas.

Actividad tipo: ☒Ejercicio ☐Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Aquí no vale con resolver el sistema de ecuaciones, hay que dar un paso más. Este es un buen ejercicio en el que el alumno se enfrenta a las rectas dadas de diversas formas y en el que tiene que seguir un mismo patrón de razonamiento para resolverlo.

Ejemplo:

25. Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:

a) $r: (x, y, z) = (1, 7, 0) + k\,(2, 3, 1)$

$r': \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+1}{1}$

b) $r: \begin{cases} 3x - y - 21 = 0 \\ 5y - 3z - 3 = 0 \end{cases}$

$r': \begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 5x - 2z - 10 = 0 \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

$r': \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z}{2}$

d) $r: \dfrac{x+1}{3} = y = z - 2$

$r': (x, y, z) = (3, 1, 2) + k(1, 4, -1)$

e) $r: (x, y, z) = (2, 1, 0) + k\,(1, -2, 2)$

$r': \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z+2}{2}$

f) $r: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+3}{6} = \dfrac{z-1}{4}$

$r': (x, y, z) = (3, -3, 1) + k\,(1, -3, -2)$

g) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$

$r': \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Lugar geométrico como tal. Se podía preguntar de otra manera evitando decir que salen dos planos como solución. Es un muy buen problema aunque no es posible que los alumnos se enfrenten al mismo porque no es de los problemas tipo que caen en selectividad. Lo que lo hace interesante es la inclusión de esa 3ª dimensión, la z.

Ejemplo:

32. Determina los planos bisectores a los planos π_1 y π_2 siendo $\pi_1: 5x+2y+z-3=0$ y $\pi_2: -2x+5y=0$.

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Resolver este problema requiere seguir una serie de pasos que el alumno tiene que fijar. No tiene mucho de lugares geométricos pero sí de la filosofía que hay que seguir a la hora de tratar muchos problemas en los que aparecen.

Ejemplo:

57. Halla el plano que contiene el punto $A=(1, 2, -3)$, es paralelo a $r: x-3=y=z+1$, y perpendicular a $\pi: 2x-y+z-1=0$

Sol.: $\pi': 2x+y-3z-13=0$

3.4.3. Extraídos del tema 8: curvas y superficies

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Este es uno de los pocos problemas en los que hay 'letras', es decir, parámetros. Sin embargo es de un nivel muy superior al que cabría esperar en bachiller. Parametrizar la circunferencia es pedir demasiado.

Ejemplo:

3. Halla una representación en ecuaciones paramétricas de la circunferencia de centro $C=(a, b)$ y radio r.

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Problema igual a los que había en el curso anterior. Nuevamente se cuestiona dónde comienza la importancia geométrica y termina la algebraica. Nivel bastante elevado.

Ejemplo:

5. Halla la ecuación de la recta tangente y la recta normal a las siguientes cónicas que pasan por el punto indicado en cada caso:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$ $\quad P = (1, 2)$

b) $y^2 = 8x$ $\quad P = (2, 4)$

c) $2x^2 - y^2 + 8x + 2 = 0$ $\quad P = (0, -\sqrt{2})$

d) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$ $\quad P = (-3, 7)$

Actividad tipo: ☐Ejercicio ☒Problema ☐Cuestión ☐Situación

Descripción: Este último problema está bien, pero es difícil que se vea en un curso normal de 2º de bachillerato.

Ejemplo:

62. Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya suma de distancias a los puntos (0, 0, 2) y (0, 0, −2) sea 5.

Sol.: $100x^2 + 100y^2 + 36z^2 - 225 = 0$.
Elipsoide de revolución

Capítulo 4: Resultados

En el presente apartado se analizan los tres capítulos previos tratados en esta primera parte del trabajo. Para dicho análisis, se ha empleado como libro de matemáticas de referencia el siguiente: Elementos de geometría, de G.M. Bruño. La elección de este libro ha sido una recomendación del Dr. Gustavo Ochoa, director del presente documento.

El libro de referencia es bastante característico. Concretamente la edición impresa utilizada data de 1927 y tiene un enfoque orientado a la enseñanza secundaria y preparatoria de aquel entonces. Tiene un enfoque completamente distinto al de los libros de texto en la forma de mostrar los contenidos.

Este análisis es muy importante de cara a entender la trasposición didáctica que se produce, en particular con el tema de lugares geométricos y cónicas. De ahí el contar tanto con los libros escolares mencionados previamente como con un libro de saber ‘superior. El capítulo tiene dos secciones, la primera trata las ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto, y la segunda, centrada en la relación entre los libros de texto y el currículo.

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

El aspecto que más sorprende y dificulta el estudio de la didáctica de los lugares geométricos y las cónicas es su especificidad. Tan solo se menciona lugar geométrico en el currículo en los cursos de 3º de E.S.O. y 1º de bachiller. Además, en bachiller sólo se estudian en la opción de ciencias cursada por alumnos que en un futuro encaminarán sus vidas hacia las ingenierías o hacia la salud. En 4º de la E.S.O. sólo se ha analizado la opción A. Por eso es muy importante la labor de buscar una serie de descriptores que recojan nociones previas y relacionadas con la de lugar geométrico a lo largo del currículo.

En relación a los descriptores, los contenidos y criterios de evaluación relativos a los mismos tanto en el currículo como en los libros de texto se presentan en forma de espiral. Aunque las ausencias comentadas en el párrafo anterior dificultan el aprendizaje, en general es cierto que para poder adquirir los conocimientos relativos a un curso se parte de los conocimientos adquiridos el curso anterior dando una ‘vuelta de tuerca’ más. A continuación se muestra cómo.

En lo relativo a distancias, en el segundo ciclo de la E.S.O. los estudiantes aprenden a aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas y a familiarizarse con las posiciones relativas. Esta base y sobre todo la adquirida en el tema de geometría analítica plana son fundamentales para poder pasar a este tema. En 2º de bachiller el manejo de distancias y de relaciones en el espacio aparece en la geometría en el espacio.

Aunque los alumnos conocen la circunferencia, esta sólo entra en el temario de 3º de la E.S.O. junto con los cuerpos de revolución. Vuelve a entrar en el temario en 1º de bachiller. La diferencia, en lo que respecta a este descriptor, está entre los alumnos que cursan dibujo técnico y los que no lo hacen.

Finalmente, referente a las propiedades geométricas, estas se tratan en 3º de la E.S.O., en 4º el enfoque de la geometría cambia y pasa a centrarse en el cálculo de áreas, volúmenes, alturas… hasta llegar a Bachillerato donde comprender las propiedades geométricas, no sólo de forma gráfica sino algebraica, cobra muchísima importancia.

Para ver esto en los libros de texto se han realizado unas tablas en las que se recogen los temas relacionados con los descriptores analizados en los distintos libros de texto analizados.

3º E.S.O.
8. Funciones lineales: • Obtención de la ecuación de una recta • Posición relativa de dos rectas
9. Geometría en el plano: • Circunferencia • Figuras circulares
11. Cuerpos geométricos: • Cuerpos de revolución

Tabla 11: Temas del libro de texto relacionados en 3º de E.S.O. con los descriptores analizados

4º E.S.O.
8. Áreas y volúmenes: • Teorema de Pitágoras • Aplicaciones del teorema de Pitágoras • Figuras circulares • Cuerpos de revolución
10. Vectores: • Ecuaciones de la recta

Tabla 12: Temas del libro de texto relacionados en 4º de E.S.O. con los descriptores analizados

1º Bachiller
10. Geometría analítica: • Recta en el plano • Posición relativa de rectas • Distancias en el plano • Aplicación: determinación de los puntos notables de un triángulo
11. Lugares geométricos. Cónicas: • Definición de lugar geométrico • Circunferencia • Determinación de una circunferencia • Posición relativa de una recta y una circunferencia. Recta tangente • Potencia de un punto respecto a una circunferencia • Elipse • Hipérbola • Parábola

Tabla 13: Temas del libro de texto relacionados en 1º Bachillerato con los descriptores analizados

2º Bachiller
6. Geometría afín: • Rectas en el espacio • Planos en el espacio • Posiciones relativas
7. Geometría métrica: • Distancias • Resolución de problemas métricos
8. Curvas y superficies: • Curvas en el plano en coordenadas cartesianas • Superficies en el espacio en coordenadas cartesianas

Tabla 14: Temas del libro de texto relacionados en 2º Bachillerato con los descriptores analizados

Las diferencias entre el texto de referencia y el libro de texto son considerables. Es más, salvo las similitudes matemáticas (ambos tratan las mismas nociones), es difícil encontrar puntos en común. Con esto no se pretende valorar uno u otro de forma negativa, simplemente remarcar dos enfoques distintos.

Una de las diferencias principales está en el desarrollo. Al margen de la profundidad alcanzada por uno u otro texto, el libro de texto parte de la definición de lugar geométrico para luego definir las cuatro cónicas mientras que en el libro de referencia la noción de lugar geométrico es algo anecdótico. No aparece su definición como tal y las cónicas se definen como curvas tales que sus puntos cumplen tal o cual propiedad. De hecho se trata en un primer capítulo la circunferencia y en otro aparte, titulado 'curvas especiales' las otras tres cónicas restantes (sin mencionar la palabra cónica).

El desarrollo del texto de referencia es mucho más teórico. Construye el conocimiento requerido en cada capítulo a base de formular teoremas, corolarios y escolios, demostrarlos y resolver algún que otro problema, todos ellos, eso sí, en función de parámetros.

Sería impensable un enfoque similar en un libro de texto. En este cada tema se introduce, las definiciones son mínimas y la presencia de teoremas y demostraciones se reduce al máximo (y no suele darse). Además hay ejercicios más sencillos para que el alumno se familiarice con los conceptos y su aplicación y finalmente problemas.

Pero sobre todo, la principal diferencia está en el tratamiento. Por ejemplo, en el tema de circunferencias del texto de referencia se estudia a esta, su centro, el diámetro, los arcos, posiciones relativas de puntos, rectas y circunferencias con respecto a otra circunferencia, pero no se hace en el plano cartesiano; es decir, la circunferencia no se presenta como una relación en la que aparecen x´s, y´s y están igualadas a cero.

Esto me sugiere la siguiente cuestión. ¿Qué tratamiento es más adecuado usar? ¿Un tratamiento puramente geométrico u otro en el que la geometría se 'mezcla' con el álgebra? Tras haber vivido mi plan de estudios y visto este nuevo creo que en ambos, al nivel de 1º de bachiller, es más adecuado el que se plantea en los libros de texto. Sin duda. No obstante se corre el riesgo de inclinarse demasiado hacia el álgebra y descuidar la parte geométrica, aspecto del cual, en mi opinión peca el libro de texto.

Sin haber encontrado similitudes evidentes, este análisis contrasta un libro con un enfoque muy matemático-geométrico con los libros de texto actuales. La comparación no es ni mucho menos odiosa, sino que abre nuevas perspectivas y justifica de manera adecuada el enfoque visto en los libros de texto normales.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Antes de entrar en comparaciones con el currículo, durante la elaboración de este trabajo se ojearon varios libros y se llegó a la conclusión de que todos son bastante similares entre sí. Las diferencias principales se encuentran en la distribución de los temas, siendo los mismos en un 90%, en el número de los ejercicios (no tanto en el estilo) y sobre todo en la presentación.

A priori, la coherencia de los mismos con el currículo es clara. A posteriori no tanto. Por ejemplo, en el libro de 3º de E.S.O. analizado no hay ninguna alusión a la noción de lugar geométrico. Subjetivamente es un libro estupendo en lo referido a presentación de contenidos, ejercicios y claridad.

Con el libro 2º de bachiller sucede justamente lo contrario, este trata una serie de contenidos que están fuera del currículo.

En el resto de casos la coherencia es clara, lo que era de esperar ya que es el currículo oficial recogido en los reales decretos el que marca los contenidos mínimos en la E.S.O. y los contenidos en bachiller. Parte de las diferencias entre libros subyacen en lo que se conoce como currículo oculto. No es objetivo de este trabajo su análisis salvo cuando afecte a la didáctica y en el caso concreto del libro de texto seguido durante la estancia.

Otras diferencias se deben a ciertos contenidos adicionales ofrecidos por los libros, que generalmente se adelantan al currículo sin llegar a profundizar demasiado. En vista a los mismos es el profesor quien escoge el libro previendo dar dichos contenidos en el curso por adelantarlos a los estudiantes para otros años.

Esto no sucede en lo referido a los lugares geométricos y las cónicas. Como ya se ha comentado es un tema ‘aislado’ en 1º de bachiller que requiere un salto de conocimiento relativamente alto y no presenta una continuidad evidente con el currículo de 2º de bachiller. Por eso, todo indica a pensar que este es un tema que en muchos centros no se dé, bien por tiempo, bien por avanzar con contenidos que resulten más necesarios en 2º de bachiller.

Parte II: Análisis de un proceso de estudio de los lugares geométricos y las cónicas en 1º Bachillerato

Esta segunda parte está nucleada en torno tema impartido durante las prácticas realizadas durante los meses de abril y mayo del año 2012 en el colegio San Ignacio (Jesuitas) de Pamplona.

Se va a realizar un análisis de la docencia del tema de lugares geométricos y cónicas en 1º de bachiller. Su desarrollo está estructurado en 4 capítulos. En el primero de ellos se va a analizar el tema en el libro de texto. En el segundo capítulo se resumen las dificultades y errores previsibles que pueden encontrar los alumnos al enfrentarse a este tema. El tercer capítulo recoge el proceso de estudio realizado y el cuarto analiza una serie de resultados obtenidos durante la estancia en el centro.

Finalmente se ha elaborado una breve síntesis, extraído conclusiones y planteado varias cuestiones abiertas consecuencia tanto de la experiencia como de su posterior análisis.

Capítulo 5: Lugares geométricos y cónicas en el libro de texto de referencia

En este capítulo va a analizarse el tema 10 del libro de texto de matemáticas de 1º de Bachillerato de la editorial McGraw Hill. El título del tema es ‘Lugares Geométricos. Cónicas’. Durante las prácticas en el centro este fue el libro de referencia en todo momento.

A la hora de elaborar la primera parte del análisis del tema en el libro de texto se ha usado como texto de referencia el artículo ‘Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta’, de Juan D. Godino, Vincenç Font y Miguel R. Wilhelmi del año 2006.

5.1. Objetos matemáticos involucrados

El análisis de los objetos matemáticos involucrados se ha hecho de manera semejante a la configuración epistémica ‘empírica’ presente en la página 139 del artículo de referencia.

Lenguaje
Verbal: Lugar geométrico, puntos, propiedad geométrica, equidistancia, distancia, mediatriz, segmento, ángulo, bisectriz, recta, plano, expresión matemática, circunferencia, centro, radio, ecuación, posición relativa, tangente, secante, recta exterior, recta normal, potencia de un punto respecto de una circunferencia, elipse, focos, constante, ejes, semi-distancia, cónica, ecuación reducida o canónica, excentricidad, hipérbola, valor absoluto, asíntota, hipérbola equilátera, ecuación asintótica, parábola, directriz
Gráfico Representaciones en ejes cartesianos, dibujos esquemáticos (sin letras), proyecciones de figuras tridimensionales, dibujos instructivos (como trazar una elipse con un hilo, por ejemplo) No hay ninguna sola foto excepto la de la primera página.
Simbólico: $A(1,-1), x-y+2=0, d(P,A)=d(P,B), r: x+y-1=0$ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \sqrt{5}, y-y_0=-\frac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0), Pot_c(P)=\overline{PA_1}\cdot\overline{PB_1}$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \lvert d(P,F)-d(P,F')\rvert = constante, e>1, \ldots$

Tabla 15: Configuración epistémica “empírica” de la adición y de la sustracción. Parte del lenguaje.

Situaciones
Problemas descontextualizados en los que dadas una ecuación de algún lugar geométrico se pide el cálculo de algún elemento del mismo.
Problemas descontextualizados en los que dadas una ecuación de algún lugar geométrico y alguna condición adicional se pide determinar otro lugar geométrico.
Problemas descontextualizados en los que dados una serie de datos relativos al lugar geométrico que se explicita, se pide su determinación algebraica.
Problemas contextualizados en los que el alumno tiene que determinar el lugar geométrico sin a priori conocer de cual se trata.
Problemas contextualizados en los que el alumno tiene que idear una serie de pasos previos a su ejecución para después llevarlos a cabo (heurística).

Tabla 16: Configuración epistémica "empírica" de la adición y de la sustracción. Parte de las situaciones.

Conceptos
Previos
Recta en el plano. Posición relativa entre rectas. Distancias en el plano entre dos puntos y entre un punto y una recta. La circunferencia y sus propiedades. El cono. Coordenadas y gráficas cartesianas.
Emergentes
Propiedad geométrica y lugar geométrico. Cónicas. Generalización algebraica de la distancia punto-punto y punto-recta. Posición relativa entre distintos elementos geométricos en el plano. Resolución sistemas de ecuaciones no lineales. Relación matemática.

Tabla 17: Configuración epistémica "empírica" de la adición y de la sustracción. Parte de los conceptos.

Procedimientos
Descontextualización del enunciado del problema Contextualización de enunciados descontextualizados Encontrar la expresión matemática de una propiedad geométrica. Calcular las ecuaciones de lugares geométricos en el plano. Manejo de expresiones no lineales: circunferencia, parábola. Comprobar si un punto pertenece a un lugar geométrico. Determinar la posición relativa entre distintos elementos geométricos: recta con cónicas. Obtención de rectas que satisfagan determinadas condiciones. Obtención de circunferencias que satisfagan determinadas condiciones. Reconocimiento de los elementos característicos de las distintas cónicas. Representar gráficamente un lugar geométrico según su expresión matemática.

Tabla 18: Configuración epistémica "empírica" de la adición y de la sustracción: procedimientos

Propiedades
Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad (geométrica). Descrita la propiedad hay que encontrar su expresión matemática. La circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola son lugares geométricos. También reciben el nombre de cónicas. La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan una distancia fija llamada radio de un punto fijo llamado centro. La elipse es… Una recta puede ser exterior, tangente o secante a una circunferencia. (En el plano) Hay varias formas de determinar una circunferencia. 3 puntos no alineados es una de ellas. La hipérbola y la elipse pueden expresarse con una ecuación que recibe el nombre de ecuación reducida o canónica. Sólo vale para ciertos casos.

Tabla 19: Configuración epistémica "empírica" de la adición y de la sustracción: propiedades

5.2. Análisis global de la unidad didáctica

A continuación se presenta un análisis más detallado de la unidad didáctica, es decir, el tema de lugares geométricos y cónicas del libro de texto de matemáticas de la editorial McGraw Hill. Dicho capítulo se ha escaneado y se adjunta en el anexo A de este documento.

El tema está estructurado de la siguiente manera:

- Definición de lugar geométrico
- Circunferencia
- Determinación de una circunferencia
- Posición relativa de una recta y una circunferencia. Recta tangente
- Potencia de un punto respecto de una circunferencia
- Elipse
- Hipérbola
- Parábola
- Problemas resueltos
- Problemas propuestos
- 10 cuestiones básicas. 2 cuestiones para investigar

Con un rápido vistazo puede apreciarse que todas las unidades comienzan en una página impar en la que hay una imagen a color y contiene los siguientes elementos:

- El número de la unidad y el título sobreimpresionados en la parte superior.
- Los objetivos de la unidad en la parte inferior.

La ilustración de inicio está y no está relacionada con el tema al mismo tiempo. En el tema que se trata aparece una llanta de aleación en el que aparecen circunferencias y unos huecos con forma de parábola. Sin embargo, no se hace ninguna ilusión a esta ilustración al comienzo del tema.

Todas las unidades del libro siguen el mismo esquema y tienen una extensión más o menos similar, entre 20 y 30 páginas. Habiendo 20 unidades en total, el libro contiene 421 páginas; un libro bastante contundente. En particular este tema ocupa 24 páginas y alberga un contenido relativamente denso y nuevo, como se verá más adelante.

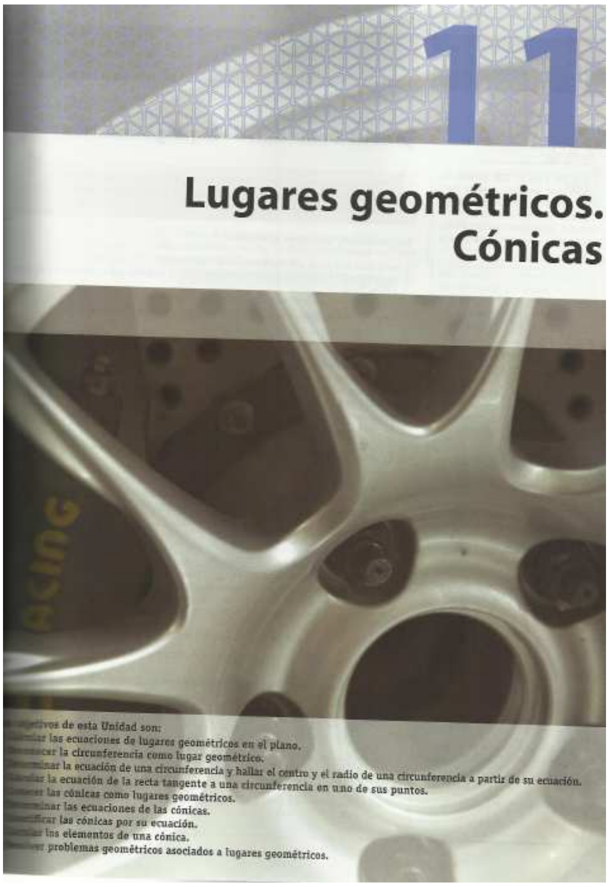
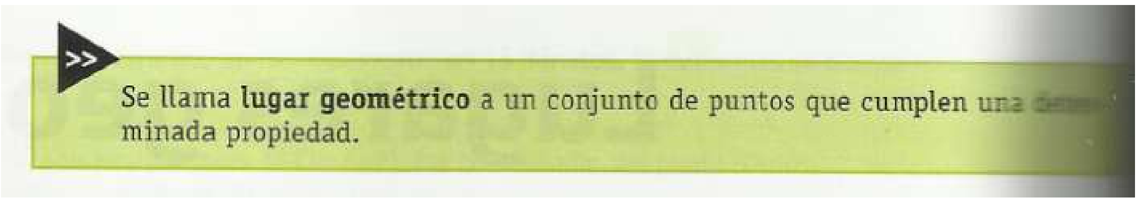


Figura 1: Primera página del tema en el libro

En la página siguiente se empieza de lleno con el tema: la definición del lugar geométrico. Todas las definiciones ‘clave’ del tema aparecen en un rectángulo verde, con la noción definida en negrita.



Se llama **lugar geométrico** a un conjunto de puntos que cumplen una
minada propiedad.

Figura 2: Definición de lugar geométrico en el libro de texto

Después se plantean y resuelven dos problemas contextualizados: el cálculo de la mediatriz y de la bisectriz. En el margen de la izquierda se incluyen tanto unos dibujos orientativos como la solución al problema que se plantea y resuelve de la mediatriz:

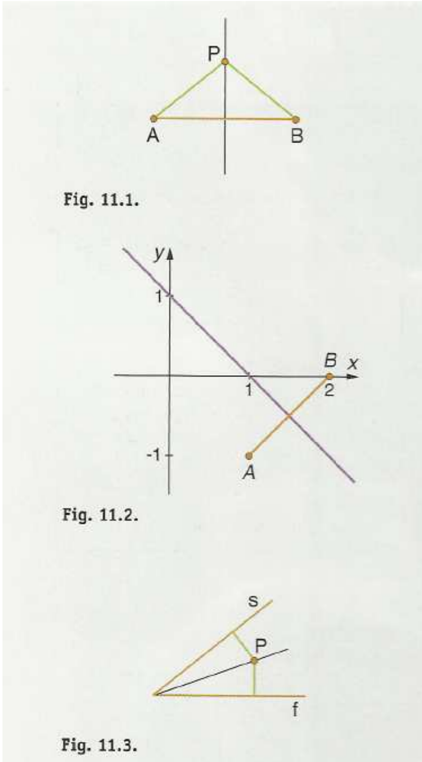
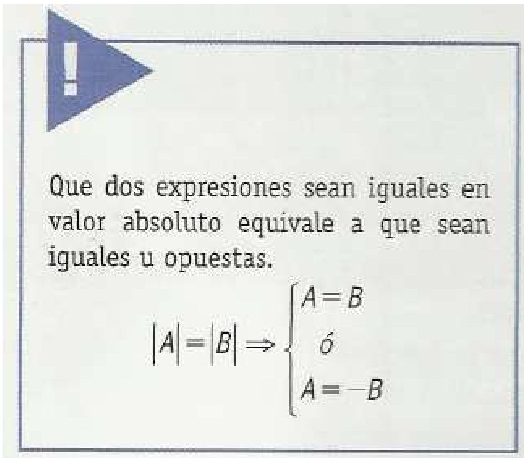


Figura 3: Dibujos auxiliares que figuran en el margen.

Este tipo de dibujos está presente por todo el capítulo y son fundamentales para que el alumno obtenga una referencia visual de lo que está haciendo. Junto con este tipo de dibujos, los márgenes también están sazonados con ‘recuerdas’, como este acerca del valor absoluto.


!

Que dos expresiones sean iguales en valor absoluto equivale a que sean iguales u opuestas.

$$|A| = |B| \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ \text{ó} \\ A = -B \end{cases}$$

Figura 4: Recordatorios presentes por el libro de texto

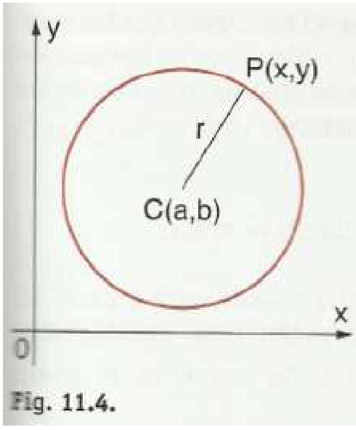
Cuestión aparte de que los alumnos reparen o no en el uso correcto del valor absoluto en el ejercicio de la bisectriz, recordarlo nunca está de más y esta es una aportación positiva del libro. Podría potenciarse más referenciándola en el propio contenido del libro en el que aparece una ecuación con un valor absoluto, pero esto es una opinión personal.

El esquema general del libro, si se tomara una página aleatoria, sería como el de la página 209 que trata el punto 11.2: la circunferencia. En primer lugar se planta su definición con letra.

>> La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *centro*. La distancia del centro a un punto de la circunferencia se llama *radio*.

Figura 5: Definición de circunferencia en el libro de texto

Y después se caracteriza tanto gráficamente como matemáticamente; es decir, dando la ecuación de la misma.



Si el centro de la circunferencia es el punto $C(a, b)$ y su radio r, cualquier punto $P(x, y)$ de la circunferencia verificará la *propiedad* $d(P, C) = r$; es decir:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

que es la **ecuación** de la circunferencia.

Desarrollando esta expresión se obtiene:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

Llamando $m=-2a$, $n=-2b$, $p=a^2+b^2-r^2$, obtenemos:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0.$$

Fig. 11.4.

Figura 6: Representación y ecuaciones de la circunferencia presentes en el libro de texto

Las ecuaciones consideradas ‘clave’ en el libro se remarcan sombreándolas con un rectángulo azul. En este caso se ha considerado adecuado remarcar dos expresiones algebraicas para la circunferencia, la dada por su centro y el radio y la anterior desarrollada. Este tipo de cosas son las que potencian en gran medida la dependencia de los estudiantes a usar las fórmulas como calculadoras en las que no hay más que introducir los números que se dan en los lugares adecuados y ‘voilá’, la solución. Este hecho se evidencia en las continuas preguntas durante las clases acerca de si hay que saberse esta fórmula o se le va a dar.

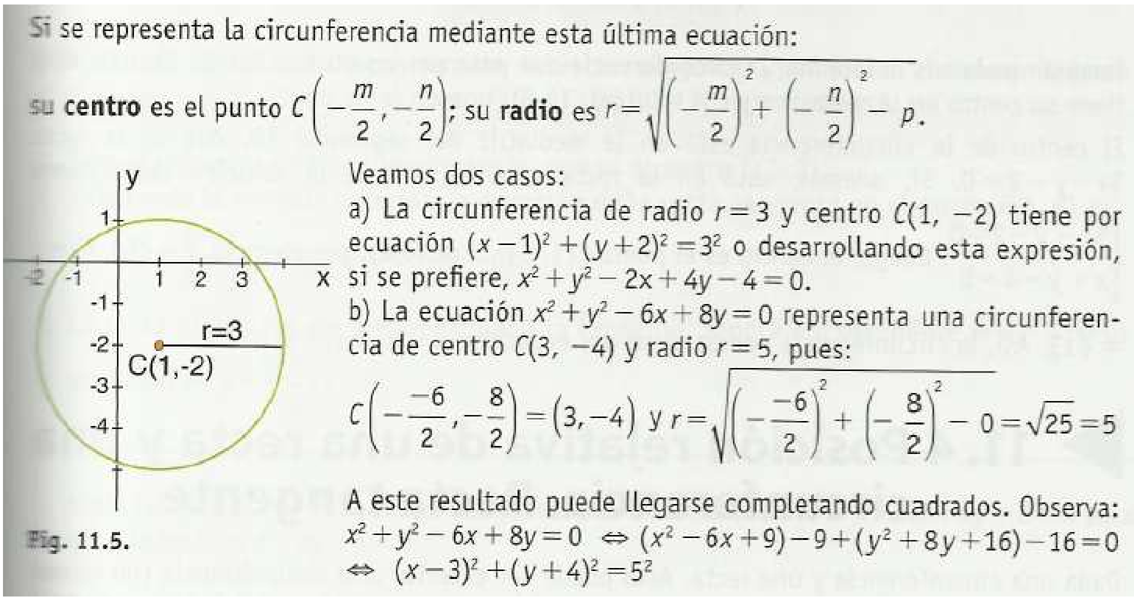
Personalmente, y esta es otra valoración, el autor de este documento sólo hubiera remarcado esta expresión:

$$d(P, C) = r$$

Figura 7: Definición de circunferencia usando la noción de lugar geométrico

Que figura en la tercera línea del primer párrafo. Aunque este apartado pretenda ser el mero análisis de la unidad didáctica planteada por el libro, son este tipo de detalles los que, como se verá a la postre, justifiquen las medidas adoptadas.

De vuelta al libro, tras el planteamiento de las ecuaciones se plantea y resuelve un ejemplo descontextualizado, nuevamente con resolución gráfica.


Si se representa la circunferencia mediante esta última ecuación:

su **centro** es el punto $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$; su **radio** es $r=\sqrt{\left(-\frac{m}{2}\right)^2+\left(-\frac{n}{2}\right)^2-p}$.

Veamos dos casos:

a) La circunferencia de radio $r=3$ y centro $C(1, -2)$ tiene por ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$ o desarrollando esta expresión, si se prefiere, $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

b) La ecuación $x^2+y^2-6x+8y=0$ representa una circunferencia de centro $C(3, -4)$ y radio $r=5$, pues:

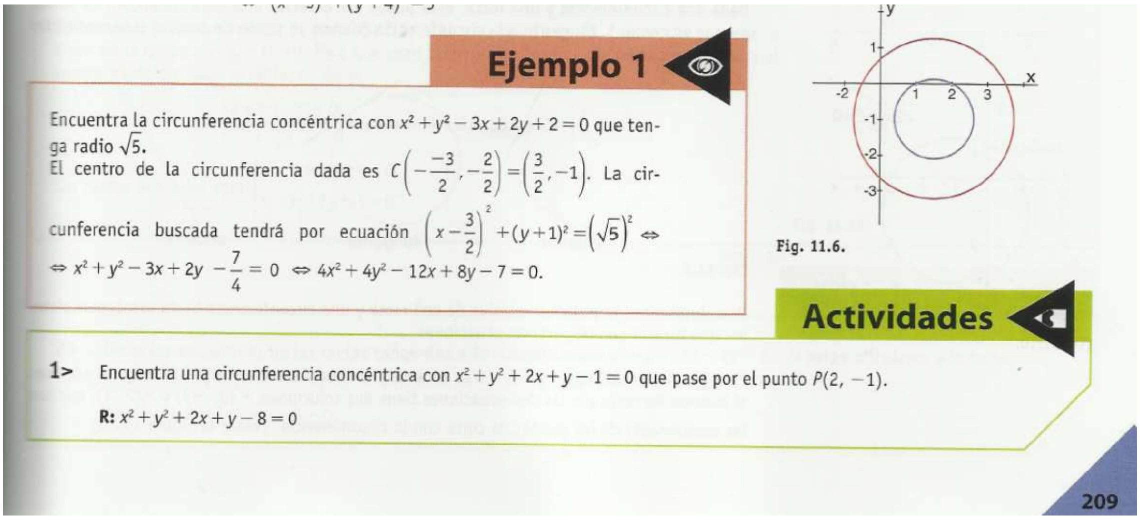
$$C\left(-\frac{-6}{2}, -\frac{8}{2}\right)=(3,-4) \text{ y } r=\sqrt{\left(-\frac{-6}{2}\right)^2+\left(-\frac{8}{2}\right)^2-0}=\sqrt{25}=5$$

A este resultado puede llegarse completando cuadrados. Observa:

$$x^2+y^2-6x+8y=0 \Leftrightarrow (x^2-6x+9)-9+(y^2+8y+16)-16=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=5^2$$

Figura 8: Resolución de una circunferencia empleando las fórmulas del libro

Después hay otra resolución de un problema de ejemplo y el planteamiento de una actividad muy similar a los dos ejemplos anteriores.


Ejemplo 1

Encuentra la circunferencia concéntrica con $x^2+y^2-3x+2y+2=0$ que tenga radio $\sqrt{5}$.

El centro de la circunferencia dada es $C\left(-\frac{-3}{2}, -\frac{2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}, -1\right)$. La circunferencia buscada tendrá por ecuación $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-3x+2y-\frac{7}{4}=0 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2-12x+8y-7=0$.

Actividades

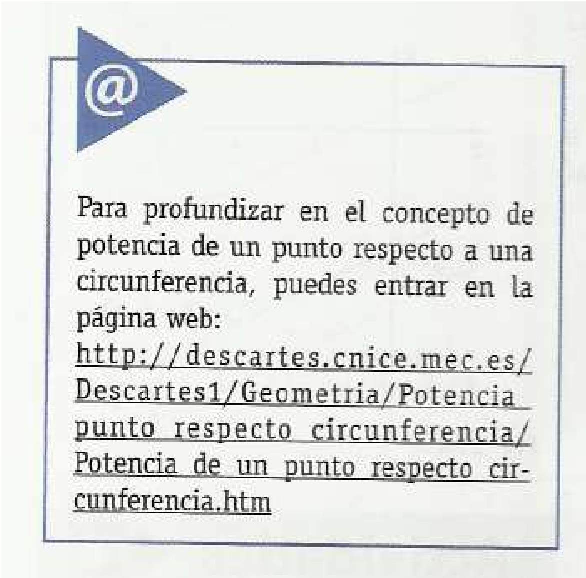
1> Encuentra una circunferencia concéntrica con $x^2+y^2+2x+y-1=0$ que pase por el punto $P(2, -1)$.

R: $x^2+y^2+2x+y-8=0$

Figura 9: Ejemplo y actividades relativas a la circunferencia en el libro de texto

A lo largo de las 8 secciones de este capítulo hay 7 ejemplos con sus respectivas 7 actividades, una por sección si exceptuamos la dedicada a la definición del lugar geométrico. Resulta que los 7 ejemplos con sus 7 ejercicios pueden resolverse mediante el empleo directo de las respectivas expresiones que aparecen sombreadas en cada sección o empleando dichas expresiones tras modificar la ecuación mediante manipulaciones algebraicas como la compleción de cuadrados (que no aparece detallada en ningún lugar del tema).

Otro tipo de información que aparece en los márgenes es relativa al uso de las nuevas tecnologías, en particular internet y la web Descartes. Aquí se presenta un recuadro que anima a profundizar en el concepto de potencia de un punto respecto a una circunferencia.



Para profundizar en el concepto de potencia de un punto respecto a una circunferencia, puedes entrar en la página web:
http://descartes.cnice.mec.es/Descartes1/Geometria/Potencia punto respecto circunferencia/Potencia de un punto respecto circunferencia.htm

Figura 10: Referencias a la red presentes en el libro de texto

Sorprende, y más en un tema tan presente y fácilmente visible en la realidad como el de las cónicas, el poco aprovechamiento de este hecho por parte del libro. Este tipo de anotaciones, también al margen, es de lo poco que hay.

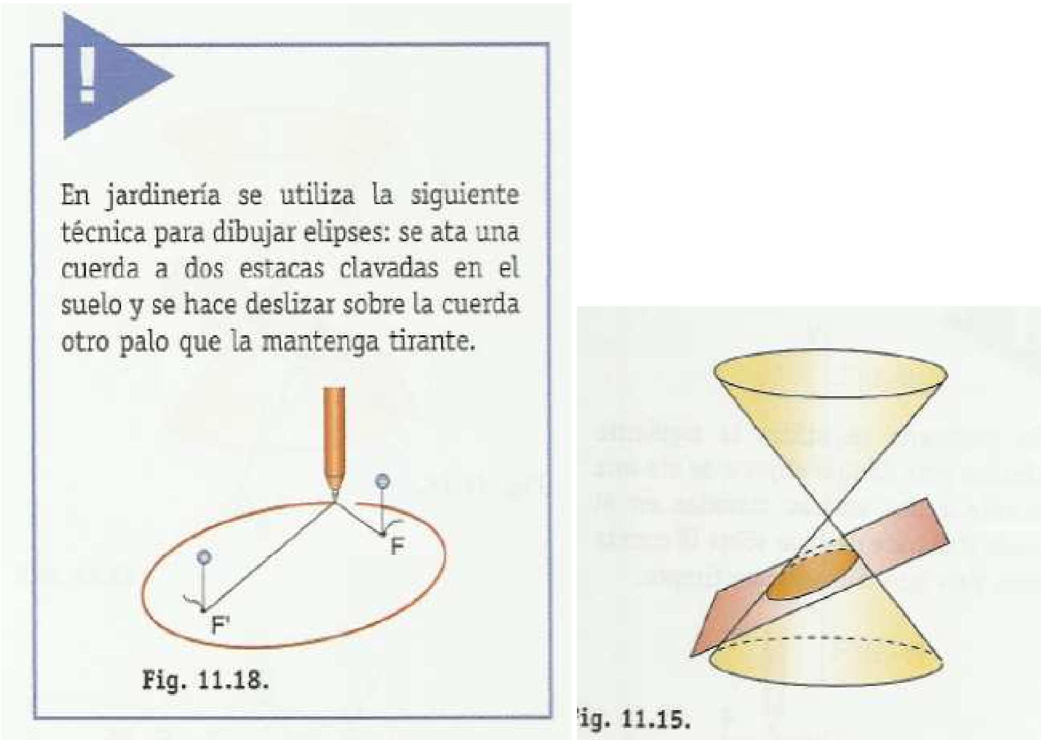


Figura 11: La elipse del jardinero. La elipse es una cónica. Ilustraciones del libro de texto.

Tras este vistazo general al tema, la estructuración de contenidos es la siguiente.

1. Definición de lugar geométrico: página 208
2. Circunferencia: página 209, dos ecuaciones, un ejemplo y una actividad.
3. Determinación de una circunferencia: página 210.

4. Posición relativa de una recta y una circunferencia. Recta tangente: páginas 210 y 211. Dos ecuaciones, un ejemplo y una actividad.
5. Potencia de un punto respecto de una circunferencia: página 212, una ecuación.
6. Elipse: páginas 213 a 215. Dentro de esta sección hay 4 sub-apartados. Tan sólo se remarca una ecuación y contiene 2 ejemplos y 2 actividades.
    a. Elementos de una elipse
    b. Ecuación reducida de la elipse
    c. Excentricidad
    d. Casos particulares
7. Hipérbola: páginas 216 a 219. Con 7 sub-apartados, se remarcan dos ecuaciones y contiene dos ejemplos con dos actividades.
    a. Elementos de una hipérbola
    b. Ecuación reducida de la hipérbola
    c. Excentricidad
    d. Casos particulares
    e. Asíntotas de una hipérbola
    f. Hipérbola equilátera
    g. Ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas
8. Parábola: páginas 220 y 221. Se sombrean 4 expresiones y contiene 3 sub-apartados para un ejemplo y una actividad.
    a. Elementos de la parábola
    b. Ecuación de una parábola
    c. Casos particulares.

Tras presentar los contenidos del tema, se llega a la sección de ejercicios. En esta sección el color de los encabezados, recuadros y números de página cambian del azul al naranja. Las tres primeras páginas son de ejercicios resueltos y el resto de ejercicios propuestos.

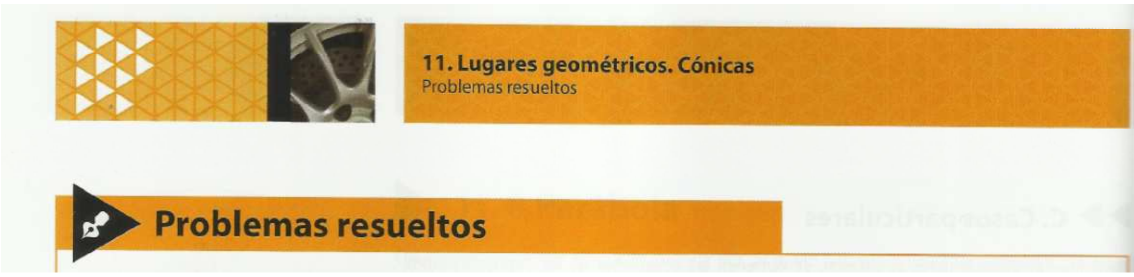
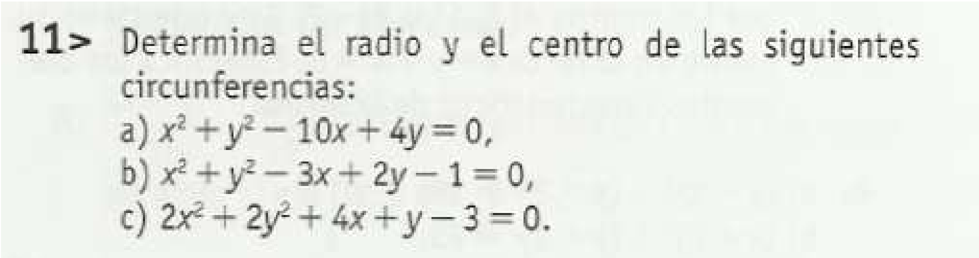


Figura 12: Encabezado de la sección de ejercicios

Tanto los problemas propuestos como los resueltos están clasificados por tipos. En este tema hay 4 tipos:

- Tipo I: Lugares geométricos
- Tipo II: Circunferencias
- Tipo III: Elipses e hipérbolas
- Tipo IV: Parábolas

Hay 10 problemas resueltos y 55 propuestos. Todos están escritos a doble columna y la inmensa mayoría de los enunciados no pasan de las 3 líneas de extensión en este formato. Esto sólo puede ser si los problemas están contextualizados, que resulta ser el caso. La aparición de la palabra ‘problemas’ en el título no debe llevar a confusión, ya que se mezclan indistintamente tanto ejercicios como problemas y alguna cuestión que precisamente se ha comentado en el capítulo 3. Este es un ejemplo de un ejercicio de los de aplicar la ecuación vista en la sección de la circunferencia.


11> Determina el radio y el centro de las siguientes circunferencias:

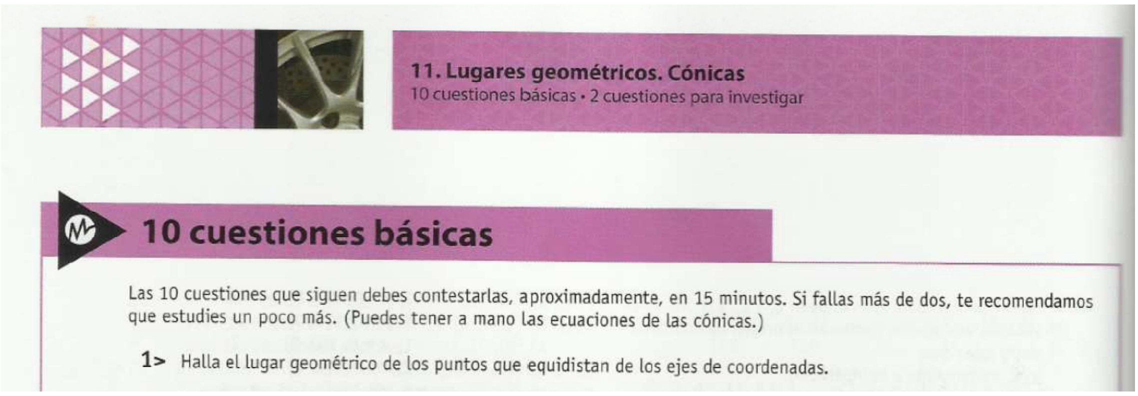
a) $x^2+y^2-10x+4y=0$,

b) $x^2+y^2-3x+2y-1=0$,

c) $2x^2+2y^2+4x+y-3=0$.

Figura 13: Ejercicio de ejemplo

La última página del tema contiene 10 cuestiones básicas y 2 para investigar. Su encabezado y pie de página son de color morado.


11. Lugares geométricos. Cónicas

10 cuestiones básicas • 2 cuestiones para investigar

10 cuestiones básicas

Las 10 cuestiones que siguen debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos, te recomendamos que estudies un poco más. (Puedes tener a mano las ecuaciones de las cónicas.)

1> Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los ejes de coordenadas.

Figura 14: Formato del encabezado de la última página del tema del libro de texto.

Esta última página puede ser un recurso útil para el alumno, a modo de auto-repaso previo al examen, si se da el caso de que el profesor sea de los que sigue el libro y plantea el examen en base al mismo.

El autor considera el libro de texto como un recurso útil tanto para el alumno como para el profesor. Contiene un gran número de actividades, está muy bien organizado y es muy claro. Sin embargo, se considera como sólo eso, un recurso, ya que su planteamiento no es suficiente para una transmisión idónea de la noción de lugar geométrico.

La sensación que transmite es que tan sólo el primer punto trata de lugares geométricos. El enfoque de las 4 cónicas como lugares geométricos es más bien anecdótico en comparación con la manipulación algebraica y el empleo de ecuaciones presente en los mismos. Además, la conexión de este tema con el ‘mundo real’, algo que puede servir para motivar el interés del alumnado por las matemáticas, no aparece en el libro, y es una carencia notable.

5.3. Otros aspectos relevantes

La noción clave de todo el tema es la de lugar geométrico. Tratarlo en una página y separarlo con un punto de las cónicas no es suficiente si el objetivo propuesto a la hora de plantear y explicar el tema es que los alumnos entiendan esta noción y sean capaces de aplicarla matemáticamente.

El punto de partida de este tema se fija con el tema anterior, el de geometría analítica en el plano. Este tema añade conceptos y nociones nuevas pero que se construyen mayormente empleando el concepto de distancia punto-punto y distancia punto-recta vistos en el tema anterior. Consiste en un ejemplo estupendo del aprendizaje en espiral.

También aparecen muchas palabras nuevas para los alumnos: se va a intentar dar el menor número de ellas posible.

Es decir, mi enfoque acerca de la unidad didáctica es parcialmente distinto al del libro de texto. Con las clases se pretendió que los alumnos entendieran primero qué es un lugar geométrico y después que aplicaran esta idea a las 4 cónicas, en vez de separar el análisis de estas dos partes tal y como aparece en el libro de texto.

Pero al mismo tiempo es inevitable tener que referirse al libro de texto, porque tanto los alumnos como yo mismo estamos acostumbrados a ello. Se plantearon la mayoría de las clases en forma de diapositivas, que se adjuntan en el anexo B, pero a la hora del examen los alumnos se aferran al libro de texto y se les dejó claro qué entraba y qué no.

A la hora del planteamiento de la unidad didáctica lo más importante es empezar por fijar los objetivos que se persiguen en conocimientos y procedimientos (en el centro: poner el examen). Este fue el consejo que más veces fue repetido por parte del tutor de las prácticas. No se puede salir de casa sin saber a dónde se quiere llegar. Desde el primer momento pude gozar de la libertad y confianza por parte del tutor para prepararse las clases como más le apeteciera, pero teniendo siempre claro qué es lo que quería que aprendieran, esto es, manteniendo la perspectiva.

Los objetivos perseguidos se analizarán en el capítulo 8 pero podrían resumirse en los siguientes:

- Entender qué es un lugar geométrico tanto matemática como gráficamente dando un repaso en espiral al tema anterior de geometría analítica.
- Entender por qué las cónicas son lugares geométricos. Cuáles son y conocer alguna aplicación.
- Distinguir función de lo que no es una función (llamémosle relación).
- Resolver problemas descontextualizados que requieran entender y aplicar la noción de lugar geométrico siguiendo unos pasos (heurística).

Junto con las diapositivas, se hizo uso del programa Geogebra, de vídeos e incluso de alguna manualidad para poder explicar de la mejor manera posible los lugares geométricos y las cónicas.

Capítulo 6: Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

En este capítulo se recogen a priori las dificultades y errores por parte del docente a la hora de enfrentarse con esta unidad didáctica. Sin embargo, en el contexto de estas práctica es difícil que en 2 semanas un alumno de este máster sea capaz de prever dificultades en los estudiantes antes de enfrentarse a un tema, por eso parte de las mismas han sido analizadas a posteriori.

Todas estas dificultades y errores se deben principalmente a dos factores:

- Es un tema completamente nuevo para la mayoría de ellos. Matemáticamente lo es para todos, pero los que cursan dibujo técnico muestran unas facilidades mayores. Plantea un enfoque de la geometría distinto al de todos los cursos anteriores
- Requiere tener muy claros los conceptos de función y ecuación y el manejo con relativa soltura de valores absolutos, polinomios y distancias de forma distinta a la que la estaban aplicando.

6.1. Dificultades

La primera dificultad, aparece en la primera hoja del libro de texto, relativa a la noción de lugar geométrico.

Una vez descrita la *propiedad*, intentaremos encontrar su expresión matemática.

Figura 15: Extracto del libro de texto

Leyendo la definición de lugar geométrico los alumnos no van a entender qué es (a no ser que den dibujo técnico) jamás. Con un ejemplo y un dibujo lo ven a la primera. Sin embargo, el paso del dibujo a la ecuación es una dificultad enorme. El concebir el punto genérico como (x, y) y entender que el lugar geométrico que esconde una ecuación son los infinitos puntos de coordenadas x e y que la resuelven es la clave del tema. Hay que hacer ejercicios siempre después de explicar cada cosa. No importa cuántos ejercicios pero sí que se hagan y pasarse por las mesas viendo el ritmo y los problemas de la clase en todo momento.

La segunda dificultad está relacionada con el aprendizaje en espiral. Previamente han dado la geometría analítica plana: rectas en el espacio, posiciones relativas, distancias… y este tema es una vuelta de rosca considerable sobre lo anterior. Esta es una dificultad natural y deseable.

La tercera dificultad es el terror generalizado hacia los parámetros. Ven x e y junto con x_0 e y_0 y r en la ecuación de la circunferencia y pierden la perspectiva de cuál es el centro, el radio y qué están calculando. Por no hablar de plantear cualquier manipulación de una ecuación en la que aparezcan parámetros.

Este es un tema nuevo para la mayoría y por eso surge la cuarta dificultad: saber qué les piden. Esta dificultad está relacionada con la primera. En un problema de calcular la circunferencia igual no saben que la solución es la ecuación de la misma.

La quinta dificultad está relacionada con lo el planteamiento de la unidad didáctica. En esta se pretende que los alumnos se enfrenten a problemas de lugares geométricos descontextualizados; es decir, problemas de letra en los que no te piden de forma explícita el cálculo de la circunferencia de centro tal y radio cual. Y es que los estudiantes no leen, o cuando leen aún no somos capaces de entender que es lo que procesan sus mentes. Sacarles de contexto los pierde y encima debido a la edad en la que se encuentran se agobian y dejan de entenderlo todo por momentos.

6.2. Errores y su posible origen

Los errores que pueden surgir en este tema son de varias de las áreas de las matemáticas, no sólo de la geométrica.

Un error que no tardó en aparecer fue el de resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Por ejemplo, al calcular la posición relativa entre una recta y una circunferencia los estudiantes trataron de resolver el sistema aplicando el método de reducción porque es al que están más habituados. No se fijaron que no era un sistema lineal.

Otro error muy sorprendente está relacionado con el manejo de las expresiones de la recta en el espacio y el cálculo de las pendientes de ciertas rectas, en particular la de las paralelas al eje OY ($x = 5$, por ejemplo). Cuando se trabaja con funciones lineales o afines la recta es una función y puede calcularse su pendiente. Sin embargo, en geometría no se habla de funciones sino de ecuaciones o ‘relaciones’ (el nombre que se le dio en clase para diferenciarlas).

Se dio el caso de que en un problema apareció una recta paralela al eje Y los estudiantes tenían que hallar la perpendicular a la misma. A la hora de afrontar este tipo de problemas los estudiantes siempre derivan la función de la recta para obtener la pendiente, para así no despejar mal. Sin embargo aquí se quedaron sin saber qué hacer porque aplicaron métodos de análisis a un problema en el que no pueden aplicarse. Aquí podría haber un obstáculo.

Finalmente aparecieron multitud de errores en la manipulación de expresiones algebraicas tales como valores absolutos, ecuaciones con radicales e identidades notables. Siendo un tema nuevo para el alumnado como es este, la presencia de raíces o fracciones y el cambio de orden de los términos son variables didácticas muy influyentes y que hay que controlar si no se quiere entorpecer el progreso inicial en este tema.

Capítulo 7: El proceso de estudio

En este capítulo se detallan las 12 sesiones sin contar el examen empleadas para el desarrollo de este tema. En principio iban a ser 8 pero dada la altura del curso y el curso en sí se disponía de relativa flexibilidad en cuanto al número de clases. Además, aunque los conceptos y procedimientos presentes en este tema no entran en la selectividad *per se*, sí que fijan una buena base en el alumno de cara a afrontar la geometría en el espacio que se da en 2º de bachiller.

La duración de las clases es de 50 minutos. Todas las clases se dieron en el aula y en casi todas se empleó el cañón proyector como apoyo. En todas se empleó la pizarra. Pude impartir 9 de las 12 clases de forma autónoma y agradezco a mi tutor semejante oportunidad y los consejos recibidos. Además, pude asistir e impartir dos clases en otra sección del mismo curso, responsabilidad de otra profesora a la que también se lo agradezco profundamente.

Previo al proceso de estudio es importante conocer lo siguiente:

- Qué y cómo se quiere enseñar: fundamental, porque la docencia en el bachiller de ciencias está repartida entre dos profesores. Y tienen que dar lo mismo. Por eso antes de impartir las clases se aclaró en unas reuniones de departamento a dónde se quería llegar. A una de esas reuniones fui con el examen ya hecho y con una hoja en la que se detallaba lo qué quería enseñar para llegar todos a un acuerdo.

- A quién se va a enseñar: no hay dos clases iguales y esta tampoco fue la excepción. La clase en la que impartió el autor es la de ‘ciencias de la salud’. Hay otra clase en la que también se da matemáticas de la opción de ciencias, pero los alumnos de esta van más encaminados a ingenierías. La diferencia entre ambas es fundamental. ¿El motivo? El dibujo técnico. Si bien ambas clases mostraron las mismas dificultades a la hora de ponerse a resolver el ejercicio ‘matemáticamente’, los que habían dado dibujo tenían una soltura tremenda a la hora de plantear los pasos que resolvieran los problemas que implicaban el empleo de lugares geométricos aunque fueran contextualizados.

Con lo anterior se prepararon las clases y los problemas. Del planteamiento inicial se fueron realizando modificaciones sobre la marcha para adaptarse al ritmo de aprendizaje. La falta de experiencia y las dificultades inesperadas fueron modelando una planificación que es la que finalmente se presenta, con sus aspectos buenos y no tan buenos. Podía haberse optado por poner la inicial, pero creo que lo segundo no sólo es más fidedigno, sino que de mucha mayor utilidad.

7.1. Distribución del tiempo de la clase

En esta sub-sección se detalla el aprovechamiento de las clases llevado a cabo. Se ha escogido la forma tabular por ser la más clara y concisa. Sin embargo, algunas clases contienen ciertos aspectos que requieren mención aparte y que aunque se detallan en la sub-sección siguiente, se mencionan en esta.

Uno de los objetivos fundamentales es el de que los alumnos sepan enfrentarse a problemas contextualizados. El primero de estos problemas se plantea en la sesión 2 y el resto se plantean durante las sesiones 10, 11 y 12. Pero es imposible afrontar un problema contextualizado sin hacer lo propio con los problemas que se proponen sacados de contexto. En todos los problemas de geometría se recuerda al alumno dos cosas: dibujar y ver cuántas soluciones pueden salir.

Sesión 1			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Teoría: lugar geométrico: ver la definición del libro. Cerrar el libro.	5 min	Profesor	Magistral
Situación: lugar 'aulariano'. Con los alumnos discutir lugares de la clase según sus propiedades.	15 min	Compartida	Dialógica
Situación: cálculo de una mediatriz. Resuelto en el libro. Planteado a los alumnos Pág. 208.	15 min	Compartida	Constructiva
Situación: cálculo de una bisectriz. De esa misma página del libro.	10 min	Compartida	Constructiva
Ejercicio 7 Pág. 225.	5 min	Alumnos	Constructiva

Tabla 20: Organización de la sesión 1

La primera aproximación de los alumnos al concepto de lugar geométrico se hace ‘discretizando’ el espacio. La fila de alumnos que están más cerca de la puerta, los alumnos que rodean a uno en concreto, a los que más puede molestar el sol… no se pretende facilitar así tanto la noción de lugar geométrico como el hecho de lograr que se abstraigan del espacio en concreto y saquen propiedades de los puntos que cumplen ciertas propiedades del mismo.

Sesión 2			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Teoría: introducción a las cónicas, cono de plastilina, Hipatia, Ágora.	10 min	Profesor	Magistral
La circunferencia. Entender distancias.	5 min	Profesor	Magistral
Determinación de la circunferencia en el plano. Restricciones	5 min	Compartida	Dialógica
Situación circunferencia que pasa por tres puntos. Libro página 210. Otra forma	10 min	Compartida	Constructiva
Situación: Problema contextualizado: riego por pivote.	20 min	Compartida	Constructiva

Tabla 21: Organización de la sesión 2

Esta segunda sesión pretende cubrir la carencia descubierta en el libro relacionando las cónicas con los lugares geométricos. Para provocar interés en los alumnos se proyectó un fragmento de la película de Ágora en la que Hipatia, interpretada por Rachel Welsz, hace mención al cono de Apolonio de Perge. Después pasé por la clase un cono elaborado con plastilina en las que podían apreciarse claramente las 4 cónicas.

Sesión 3			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Revisar el problema del día anterior.	5 min	Compartida	Dialógica
Problema posición relativa recta-circunferencia, Pág. 210.	10 min	Compartida	Constructiva
Situación: plantear y resolver el problema anterior de forma alternativa. Sacar el centro sin usar fórmulas.	25 min	Compartida	Dialógica
Problema 2 de la Pág. 211 sin usar las fórmulas del libro.	10 min	Compartida	Constructiva

Tabla 22: Organización de la sesión 3

En todo momento surge por parte de los alumnos la tendencia a emplear las fórmulas que aparecen en las páginas del libro. Mi opinión es que no sólo no son necesarias sino que también entorpecen el entender mejor la noción de lugar geométrico. No se van a emplear en ningún momento (salvo las ecuaciones reducidas de la hipérbola y la elipse) y se va a hacer saber esto al alumno.

Sesión 4			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Situación: resolver en clase el ejercicio resuelto 5 de la página 223	50 min	Compartida	Dialógica/constructiva

Tabla 23: Organización de la sesión 4

En la planificación inicial este ejercicio no iba a requerir tanto tiempo, pero a la hora de la verdad así es como fue. Se ha optado en todo momento por ir al ritmo de la clase en la resolución de ejercicios dejándoles a ellos tomar la iniciativa y pasarse por las mesas, resolver dudas y repasar otros conceptos que pueden salir a colación mientras se resuelve este tipo de ejercicios.

Sesión 5			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Situación: terminar el ejercicio 5 de la Pág. 223	20 min	Compartida	Dialógica/constructiva
Problema: 8 Pág. 226	30 min	Compartida	Dialógica/constructiva

Tabla 24: Organización de la sesión 5

Antes de poder resolver problemas contextualizados hay que trabajar bien los problemas descontextualizados. Y trabajar bien significa asegurarte de que los alumnos los trabajan bien. Aunque parezca que por que los alumnos asientan lo entienden, esto no suele ser cierto. Proyectar transparencias puede hacer correr demasiado.

Sesión 6			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Teoría explicar por qué la elipse y la hipérbola son lugares geométricos.	20 min	Profesor	Magistral
Ejercicio sacar una elipse aplicando la definición de lugar geométrico.	10 min	Compartida	Constructiva
Ecuación reducida de la elipse.	10 min	Profesor	Magistral
Ejemplo 3 Pág. 214	10 min	Compartida	Constructiva

Tabla 25: Organización de la sesión 6

Tanto esta sesión como las dos siguientes rompen un poco con la dinámica de resolución de problemas que se llevaba planteando. Se presentan contenidos un poco más exigentes de entender pero cuyos problemas se resuelven más fácilmente: aplicando las ecuaciones reducidas.

Sesión 7			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Corrección tarea. Comentario Súper-luna en relación con las órbitas elípticas	5 min	Profesor	Magistral
Reparto fotocopia, explicación fórmulas de la hipérbola en la fotocopia.	15 min	Profesor	Magistral
Ejercicio: ejemplo 3 Pág. 214	10 min	Compartida	Constructiva
Situación aplicaciones hipérbola: problema de proporcionalidad inversa	20 min	Compartida	Dialógica

Tabla 26: Organización de la sesión 7

Para evitar perder mucho tiempo se les proporcionó una fotocopia a modo de resumen con las expresiones necesarias para resolver cualquier problema de elipses e hipérbolas. Se adjunta en el apartado siguiente. La última parte de la clase se dedicó al planteamiento y resolución de un problema de proporcionalidad inversa. El comportamiento de los alumnos fue sorprendente.

Sesión 8			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Negociar el examen: fecha	5 min	Compartida	___
Ejercicios. corregir tarea	10 min	Compartida	Constructiva
Teoría: la parábola	15 min	Compartida	Dialógica
Ejercicio 7 Pág. 221	10 min	Alumnos	Constructiva
Teoría: Función Vs. Relación	10 min	Profesor	Magistral

Tabla 27: Organización de la sesión 8

Se va llegando a la recta final del tema. Puesta del examen. Estudio de la última cónica: la parábola. Relación entre la parábola vista hasta ahora (función cuadrática) con la parábola desde un punto de vista geométrico.

Sesión 9			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Función Vs relación: pensar ejemplos y discutirlos	10 min	Compartida	Dialógica
Ejercicio 9 Pág. 224	30 min	Compartida	Constructiva
Marcar 'normas del juego': qué entra en el examen	10 min	Profesor	Magistral

Tabla 28: Organización de la sesión 9

Sesión 10			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Resolución de dudas acumuladas durante el tema	15 min	Compartida	Dialógica
Ejercicio 27 Pág. 227	35 min	Compartida	Constructiva

Tabla 29: Organización de la sesión 10

Estos últimos ejercicios empiezan a ser de una dificultad considerable pero son una buena base sobre la que lograr que se aventuren mejor frente a los problemas contextualizados. Estos problemas se plantean y resuelven en las 2 sesiones siguientes y se adjuntan en la sub-sección que sigue a la presente.

Sesiones 11 y 12			
Tipo	**Tiempo**	**Responsable**	**Tipo de docencia**
Resolución de problemas contextualizados en los que haya que aplicar la noción de lugar geométrico.	50 min	Compartida	Constructiva

Tabla 30: Organización de las sesiones 11 y 12

7.2. Actividades adicionales planificadas

Aunque se hace referencia constante al libro de texto, el papel del mismo en el transcurso de las clases fue principalmente de apoyo, a la hora de extraer ejercicios y actividades; y referencia, en tanto que los contenidos básicos figuraban en él.

Sin embargo, se llevaron a cabo diversas actividades adicionales con un resultado gratamente positivo que comento en este apartado. Estas son:

- Forma de presentar los lugares geométricos.
- Acercar las matemáticas a sus vidas: película de Ágora, Súper-luna, cono de Apolonio
- Problemas contextualizados

- Entrega de formulario-resumen
- Empleo de Geogebra

Se comenzó presentando el lugar geométrico en un plano discreto: el de la clase y sus pupitres. Después, se pasó a su definición matemática mediante la mediatriz, la bisectriz y la circunferencia. En estos tres casos el estudiante puede fácilmente sustituir cualquier punto en la ecuación y ver si se verifica. Además su representación es muy sencilla. La elipse se explicó empleando el método que siguen los jardineros para elaborar parterres: con una cuerda, tiza y dos focos. Para la hipérbola se empleó Geogebra y un *applet* hecho a tal efecto:

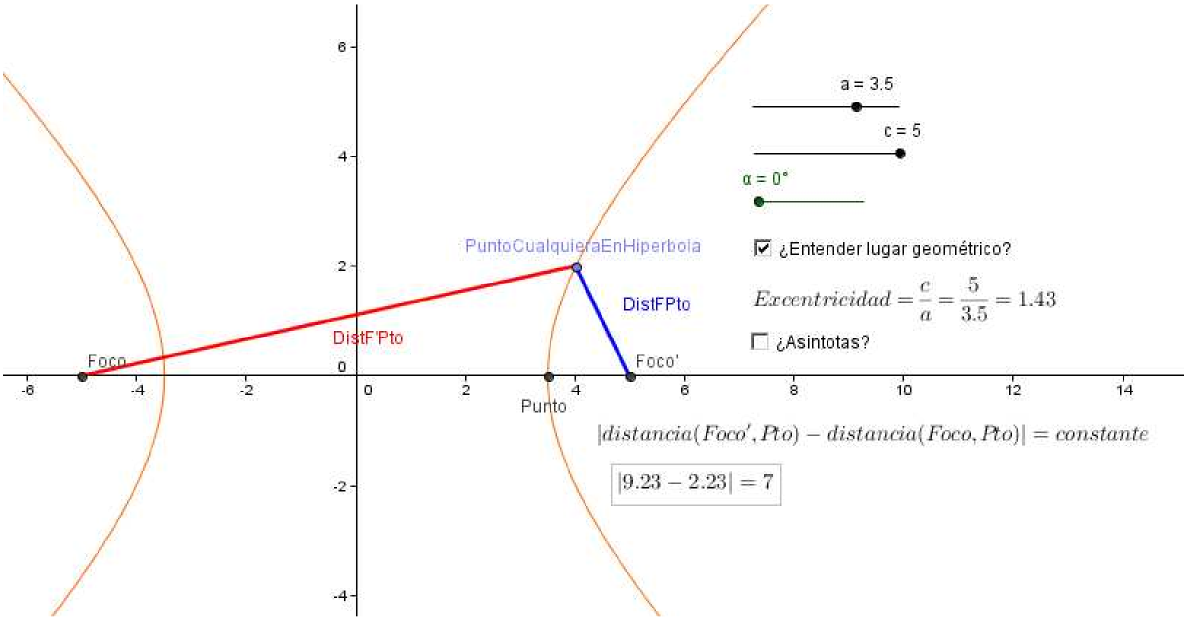


Figura 16: Copia de pantalla de un applet de Geogebra relativo a la hipérbola

Y finalmente, la parábola la fueron dibujando ellos. Dibujé una recta vertical y un punto, anoté la definición de parábola como lugar geométrico y mientras preparaba el cañón fueron saliendo a la pizarra y marcaron de maravilla puntos que equidistaban tanto de la recta como del punto. (Al principio del tema no fueron capaces en una situación similar).

El tema de las cónicas es un tema idóneo para subrayar las aplicaciones prácticas de las matemáticas en la vida diaria. Por eso, un lunes tras el fin de semana de la 'súper-luna' se les explicó que las órbitas de los planetas son elípticas, por ejemplo. Además, se decidió proyectar un fragmento de Ágora, película reciente y conocida por todos que trata de una matemática (había un 75% de chicas en la clase) y en la que se comenta brevemente el cono de Apolonio.

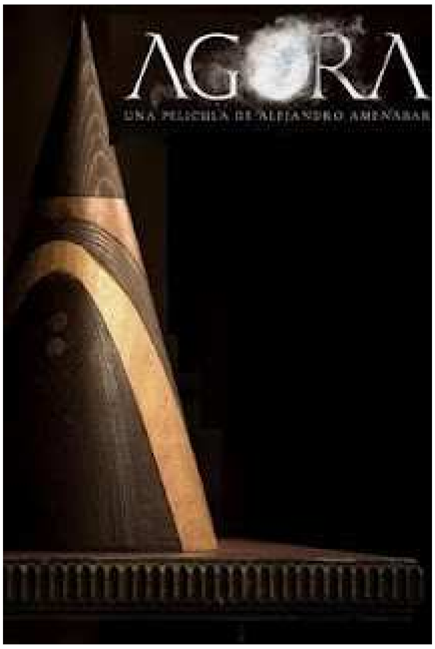


Figura 17: Cono de apolonio en la película de Ágora

El tema de los problemas contextualizados fue lo más ambicioso de lo que se llevó a cabo, sobre todo viendo las dificultades que ya aparecían al enfrentarse a los problemas del libro, todos ellos descontextualizados (calcula la recta que…). Además tampoco se encontraron problemas de estos en libros de texto por lo que se pensaron algunos para las clases. Se adjuntan a continuación.

En el cuarto de mi casa dos de las paredes vienen dadas por las rectas $y=0$ e $y=x$ (forman 45º). Si siempre guardo mi balón de balonmano 'encajonado' en estas dos paredes. ¿Dónde quedaría el centro del mismo? Radio del balón: 16 cm.

Dicen que en la isla de Justin Bieber hay oculto un tesoro. El punto exacto del mismo se determina con las siguientes pistas:

Una carretera pasa de ecuación $y=-2$

La valla de la entrada de su casa tiene forma de parábola: $x^2-4x-4y$

Para encontrar el tesoro tenemos que caminar la misma distancia desde la carretera hasta la valla, que desde la valla hasta la ubicación del tesoro.

Una pareja de surikatos habita en dos madrigueras, ubicadas en (-5,0) y (5,0) respectivamente. Como buen cazador de estos bichejos que eres, sabes que cada noche alternan entre ambas para despistar a los cazadores y que todos los días buscan gusanos en puntos tales que siempre recorren la misma distancia de 12 unidades para ir a por gusanos y cambiar de madriguera. ¿Por dónde pondrías los cepos?

Tres pueblos de la Ribera han acordado construir el nuevo parque mundial de atracciones matemáticas donde las montañas rusas siguen funciones y los primos tienen descuento. Los pueblos se encuentran en (1,8), (6,2) y (0,1). ¿Donde construirían el parque si quieren estar todos a la misma distancia?

Como todos los años, este año vaticinan ola de calor. Para estar más fresquito que el frigo-pie de Froilán ando pensando en montarme una piscina circular como la que hizo el de 'bricomanía' hace dos sábados. Pero resulta que mi jardín de mi chalé de Gorraiz es triangular y no sé cómo montar la pisci. ¿Me puedes ayudar? Los límites del jardín vienen dados por una valla de ecuación x = 0, otra de ecuación y =1 y la pared de mi casa, que puede representarse con la ecuación y = 3-x.

La ilustre ciudad de Tudela va a celebrar la IX fiesta de la alcachofa y el ayuntamiento en pleno ha decidido montar una carpa circular en el parque del Queiles. Dadas tus excelentes aptitudes matemáticas te han pedido ayuda para que les ayudes a montar la carpa en cuestión. La situación es la siguiente. Dicho parque está ubicado entre la carretera nacional, que sigue la recta x = 0 y el río Queiles, que dadas las cuantiosas lluvias acontecidas en este loco mayo, no está seco y sigue la recta y = 1. Quieren montar la mayor carpa posible (circular, recuerda) ubicada dentro del parque y con la entrada a la misma por el punto (2,5). Halla la ecuación de la carpa.
a) Conociendo el río y la carretera; ¿por dónde puedes tener la certeza de que estará el centro?
b) Pero para calcular el centro es precisa alguna condición más. PISTA 1: es un lugar geométrico. PISTA 2: La carpa 'toca' la carretera, el río y tiene que pasar por la entrada.
c) Calcula el centro y halla la circunferencia del perímetro de la carpa.

En todos estos problemas la manipulación algebraica es 'sencilla' a tenor de la importancia de esta como variable didáctica. No se busca que el alumno gane habilidad en la manipulación sino en el planteamiento del mismo.

Se ha comentado antes que se pretendía evitar el uso de toda fórmula exceptuando las ecuaciones reducidas de la elipse e hipérbola. Para facilitar a los alumnos su manejo y ayudarles en su estudio se les hizo entrega de una fotocopia (ver final de la sección).

Por último, destacar la ayuda vital que en un tema de este tipo supone el software Geogebra; tanto para el profesor a la hora de resolver y plantear ejercicios como para todo el alumnado a la hora de entenderlos.

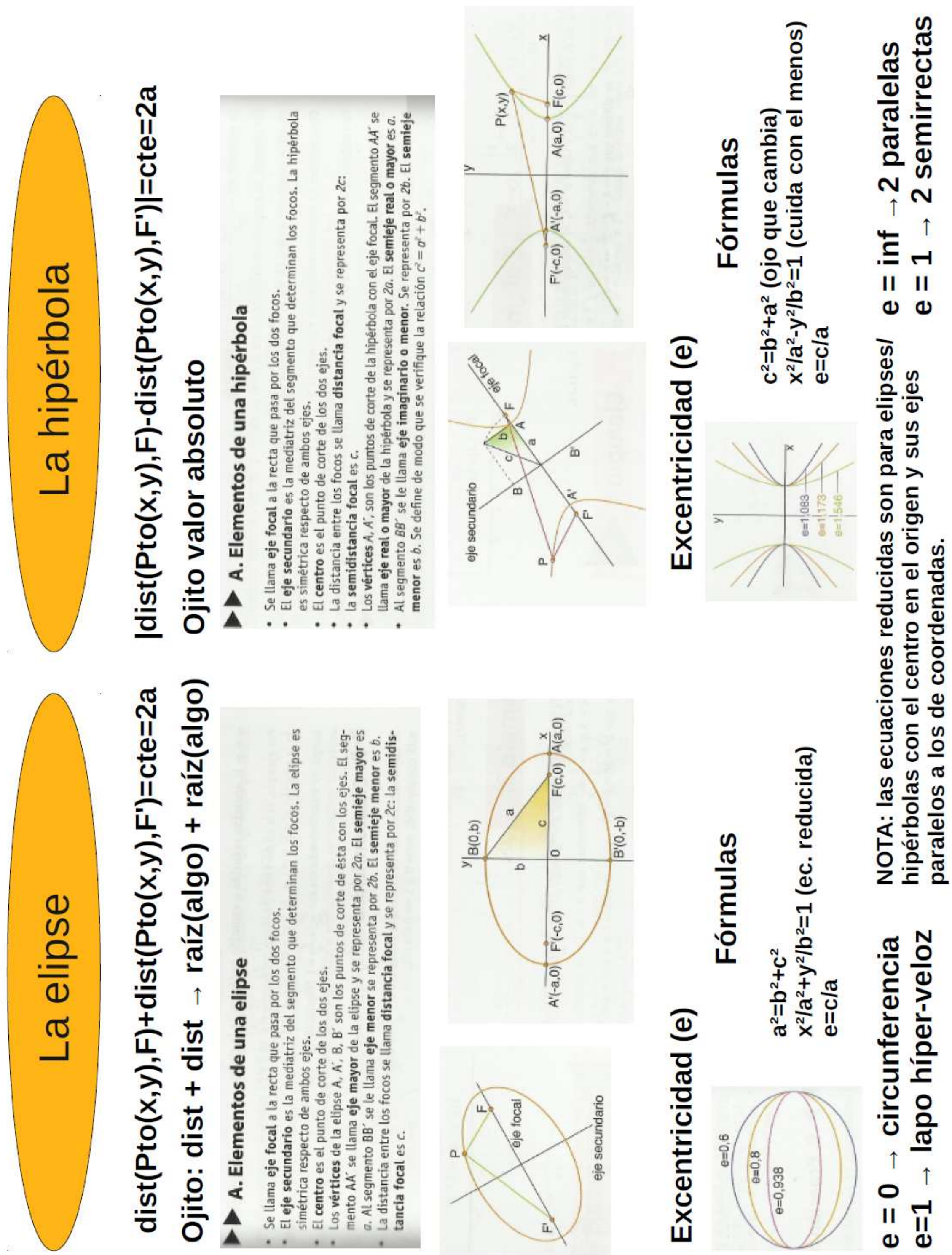


Figura 18: Fotocopia con las ecuaciones reducidas de la elipse y la hipérbola proporcionada a los alumnos

7.3. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista

Principalmente la tarea será la actividad inicialmente prevista o iniciada en la clase que no ha podido terminarse.

Tipo	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje
	Sesión 1	
Actividad: terminar el ejercicio 7 de la Pág. 225.	15-20 min	Refuerzo
	Sesión 2	
Actividad: terminar el problema del riego por pivote en casa	15-20 min	Aplicación
	Sesión 3	
Ejercicio 2 Pág. 211	15-20 min	Aplicación
	Sesión 6	
Ejercicio 3 Pág. 214	10-15 min	Refuerzo
	Sesión 7	
Ejercicios 6 Pág. 224 y 4 Pág. 228	25 min	Refuerzo
Pensar problemas proporcionalidad inversa	10 min	Aplicación
	Sesión 8	
Ejercicio 48 Pág. 229	15 min	Refuerzo
Repaso y pensar dudas pendientes	25 min	Repaso
	Sesiones 9 - 12	
Si el problema ya ha sido planteado del todo en clase, terminarlo en casa		Aplicación

Tabla 31: Tarea prevista del alumno con cada sesión.

Capítulo 8: Experimentación

En este capítulo se recoge la experimentación llevada a cabo con los alumnos a los que se les dio clase. Para ello se va a definir un método, la muestra y el diseño de experimento que se realizó. Concretamente fue un examen aunque también surgió (sin poder llevarse a la práctica) otro cuestionario adicional que se adjunta en el anexo C.

Tras estos análisis preliminares se procederá con el de los comportamientos esperados, el resumen de los resultados y una discusión acerca de los mismos.

8.1. Método

La evolución de una teoría en didáctica de las matemáticas puede determinarse por el contraste entre un análisis *a priori* y un análisis *a posteriori*. La teoría busca validar las hipótesis que formula (*a priori*). Los hechos observados permiten (*a posteriori*) validar o refutar, total o parcialmente, las hipótesis enunciadas.

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) permite abordar el contraste experimental necesario, que permita determinar condiciones de *reproducibilidad* de situaciones didácticas. Aquí, las *variables didácticas* actúan de “contraste o reactivo” que permiten de manera controlada provocar en los sujetos modificaciones en sus estrategias de acción para adaptarlas al medio.

El estudio de la adecuación de las variables didácticas para determinar cambios en las estrategias de acción representa un instrumento de validación interna de las conclusiones que puedan extraerse de una observación concreta. En estas condiciones, se puede definir una situación *reproducible*; es decir, en condiciones similares, con un control del medio, la construcción del conocimiento pretendido será la misma.

La cuestión de la reproducibilidad de las situaciones incide sobre la fiabilidad de las observaciones y, sobre todo, sobre su validez. La fiabilidad presupone una estabilidad en el funcionamiento del sistema didáctico; el contraste repetido entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* permite hacer evolucionar las condiciones del medio (incluidas las intervenciones del profesor) que garanticen la construcción del saber pretendido, de tal manera que la situación devenga reproducible. Es entonces cuando su *validez* puede ser aceptada, puesto que la situación es exitosa y aplicable de manera estable.

En este trabajo, la parte I “lugares geométricos y cónicas en el currículo vigente y en los libros de texto” constituye el estudio previo de la dimensión de enseñanza, desde una perspectiva eminentemente institucional; a saber:

1. El contenido matemático en el currículo vigente, incluidas las orientaciones y criterios de evaluación.
2. El desarrollo de estas directrices oficiales en los libros de texto escolares.

Este estudio precede al análisis *a priori* realizado en los capítulos 5, 6 y 7, donde se abordan las dimensiones:

- *Epistemológica*: las matemáticas presentes en la unidad didáctica objeto de estudio.
- *Cognitiva*: dificultades y errores de los estudiantes en el aprendizaje de la unidad didáctica.

– *De enseñanza*: descripción del proceso de estudio implementado.

En el capítulo 8, este análisis *a priori* es contrastado con los resultados de la experimentación, permitiendo una valoración de los mismos basada en las "expectativas previas" (*discusión de los resultados*), que supone la fase última del método de la ingeniería didáctica.

8.2. Muestra y diseño de la experimentación

La muestra tomada fue la sección A de 1º de bachiller del colegio San Ignacio (Jesuitas) de Pamplona. Es un grupo homogéneo mayormente perteneciente a la clase media, media-alta y que cursan la modalidad de salud dentro del bachiller considerado como científico y tecnológico. A diferencia de otras secciones de este mismo bachillerato, no dan dibujo técnico. Este es un detalle reseñable relacionado con el tema de lugares geométricos en particular.

El objetivo de la experimentación es averiguar si se han cumplido los objetivos didácticos siguiendo la docencia descrita en el capítulo anterior. Estos objetivos se determinaron en una reunión de departamento previa y se resumen en:

- Los alumnos entienden la noción de lugar geométrico, conocen las cónicas, sus aplicaciones y saben resolver diversos problemas con estas.
- Los alumnos son capaces de resolver problemas descontextualizados de lugares geométricos.
- Los alumnos son capaces de plantear y resolver problemas contextualizados de lugares geométricos.

La experimentación consistió en la resolución de un examen elaborado a partir de estos objetivos y que contó con el visto bueno de los profesores.

Jamás me había visto en la tesitura de fijar un examen y ya desde el primer momento los profesores vieron que este era demasiado exigente. No obstante, ahí es a donde yo quería que llegaran los alumnos; tenía los objetivos claros y podía preparar a conciencia las clases necesarias para ello. Una oportunidad semejante de proponer, trabajar y aprender no se tiene todos los días y es un motivo de agradecimiento siempre.

8.3. El cuestionario

El cuestionario empleado consiste en el examen que se adjunta a continuación. Los alumnos sabían que se iban a enfrentar a este examen con más de una semana de antelación y habían sido preparados para un examen de este tipo; esto es, nos aseguramos de que no hubiera 'sorpresas' cuando tuvieran la hoja delante.

Consta de 4 preguntas, una teórica y las otras 3 prácticas. La duración estimada es de unos 45-50 minutos. Sobre 10 puntos, la teoría cuenta 1/10 y los otros 9 se reparten por la práctica. Se proporcionan todas las fórmulas requeridas para su resolución.

Examen de lugares geométricos y cónicas. 1º Bachiller
Nombre:________________________ Clase:_______ Número:_____
Fecha:________de_________de 2012 Colegio San Ignacio Máximo: 10 puntos

1. [1 punto] Teoría:
   a. Cita las 4 cónicas que hemos visto y la propiedad geométrica que cumplen sus puntos en el plano.
   b. Escoge 2 de ellas y comenta muy brevemente un par de aplicaciones. (1 línea/aplicación).

2. [3 puntos] Problema nº1:
   a. Determina la ecuación de los puntos que equidistan de la recta y = -6 y del origen O = (0,0).
   b. ¿Se corta el lugar geométrico anterior con la recta y=(1/2)x -5?
   c. Si despejamos y en función de x: ¿Estaríamos ante una función o una relación? ¿Por qué?

3. [3 puntos] Problema nº2: Son las fiestas del pueblo y el ayuntamiento nos ha encargado el montaje de la plaza de toros. Como este año hacen mil años de la fundación del pueblo el alcalde ha decidido tirar la casa por la ventana y nos ha dicho que montemos la mayor plaza de toros posible. Pues bien, nos dicen que esta plaza está limitada por dos robles milenarios en los puntos A = (0,6) y B = (3,2) y por la carretera general, que pasa por por la recta r: x=-2. ¿Dónde y de qué radio ponemos la plaza?
   a. Dado que conocemos A y B. ¿Dónde es seguro que estará el centro del ruedo? Calcúlalo.
   b. Pero para determinar el centro necesitamos una condición más. ¿Cuál puede ser? PISTA: el ruedo pasa por A, B y por la carretera r. Determina esta relación.
   c. Calcula el centro y halla la circunferencia del perímetro del ruedo.

4. [3 puntos] Problema nº3:
   a. Dibuja (más o menos) la cónica dada por la ecuación $x^2/25+y^2/16=1$. Señala sus elementos más característicos: focos, semiejes y segmentos a, b y c.
   b. Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del eje OX el doble que del eje OY.
   c. Quiero pintar mi casa y estimo que hacerlo yo solo me llevaría 4 días. ¿A cuántos amigos tengo que convencer para que me ayuden y acabar de pintar mi casa en medio día? Da la ecuación de la función y dibújala. ¿Con qué nombre se conoce? Si convenciera a infinitos amigos, ¿cuánto tiempo, en teoría, tardaría?

FORMULARIO:
Ecuación reducida de la elipse: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Se cumple que $a^2+b^2=c^2$. Los semiejes son a y b y c es la semi-distancia focal.
Ecuación reducida de la hipérbola: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
Distancia punto-recta: $d(P,r) = |Ax_0+By_0+C|/\sqrt{(A^2+B^2)}$. El punto es $P(x_0, y_0)$ y la recta $Ax+By+C=0$. Distancia punto-punto: piensa en Pitágoras.

La ortografía descontará 0,25 puntos/falta hasta un máximo de -0,75 puntos.

Figura 19: Examen de lugares geométricos y cónicas propuesto en 1º Bachillerato

8.4. Cuestiones y comportamientos esperados

En primer lugar, es un examen distinto al que están acostumbrados los alumnos. Hay teoría y sobre todo, hay ‘mucha letra’. Están acostumbrados a problemas del tipo ‘halla la ecuación de la recta que pasa por… y corta a…’, de 2 ó 3 líneas como mucho y resolución más o menos directa. Sin embargo, en este examen 4 de los puntos dependen de saber resolver este tipo de problemas.

En las clases se propusieron y resolvieron problemas de este tipo, los alumnos sabían que un problema así iba a caer si bien no sabían cuál.

En segundo lugar, la base matemática de los alumnos es bastante débil. Vienen de dar geometría plana, lo cual ayuda, pero entender y saber traducir con matemáticas la noción de lugar geométrico no es en absoluto fácil. Esto se veía en todas las clases, cuando me pasaba por las mesas mientras hacían ejercicios.

Tercero, es un examen de matemáticas en el que hay teoría. Y a los alumnos también se los avisó de este hecho. La teoría consistía en conocer las cónicas, por qué son lugares geométricos y recordar alguna aplicación.

Cuarto, el tema de las fórmulas. El libro está plagado de fórmulas. En todas las páginas hay fórmulas con las que puede resolverse el ejercicio que se plantea en la parte inferior de las mismas. Aprender las fórmulas no entra dentro de los objetivos; sí aprender a deducir las más básicas y saber emplear algunas en concreto, como las ecuaciones reducidas de tanto la elipse como de la hipérbola. Todas las fórmulas necesarias se proporcionan en la parte inferior del examen.

Quinto, las manipulaciones algebraicas como variable didáctica. Operar con raíces, valores absolutos, ecuaciones con dos variables… aumenta mucho la probabilidad de que los estudiantes se equivoquen. Por eso la resolución del examen está pensada para que sea lo más sencilla posible, con simplificaciones evidentes y ausencia de números más ‘complicados’ como raíces cuadradas. Además, los criterios de evaluación están pensados para ser flexibles con este aspecto.

Sexto, es un examen que repasa multitud de conocimientos previos. Comenzando por los de geometría analítica vistos en el capítulo anterior, también hay que recordar qué es una función y se pregunta un problema de proporcionalidad inversa. Todo esto se repasó en las clases.

En resumen, los alumnos se enfrentan a un examen distinto pero para el que se les ha preparado; es decir, tienen claras las reglas del juego. Aún y todo no se espera que todos los alumnos hagan el examen a la perfección. A continuación se analiza esto cuestión a cuestión.

La primera cuestión es teórica, tiene un valor de 1 punto sobre 10 y consiste en citar las 4 cónicas y definirlas y después, de un par de ellas nombrar alguna aplicación. Se espera que esta sea la pregunta regalo y que la hagan bien prácticamente todos.

El segundo es un problema teórico dividido en tres apartados que valen 1 punto cada uno. El primero se resuelve igualando la distancia punto-punto a la distancia punto-recta (se obtiene una parábola de eje OY). Después hay que resolver un sistema de ecuaciones y ver si la parábola calculada puede expresarse como y en función de x de acuerdo al sistema de coordenadas empleado. Las dos últimas cuestiones dependen de la primera para poder resolverse. En principio se espera que más de la mitad de la clase (50-75 %) obtengan en este problema 2 puntos.

El tercero es ‘el problema’. Y es un problema bastante difícil. Por eso y para que al menos una persona lo hiciera bien se desmenuzó el mismo en tres apartados que ayudan a su resolución. Sin embargo se hizo de tal manera que el alumno tuviera que pensar en el lugar geométrico subyacente; esto es, en el apartado a) no se pide explícitamente que se calcule la mediatriz. En este problema se espera que en torno a la mitad saquen un punto bien porque lo entiendan, bien probando. Y que la cuarta parte saque 2 ó más puntos.

La cuarta pregunta también tiene tres sub-apartados en este caso independientes entre sí. El primero consiste en dibujar una elipse dada su ecuación reducida y localizar sus elementos principales. El segundo plantea el cálculo de una bisectriz. La dificultad en este está en despejar bien los términos en la fórmula de la distancia punto-recta (algo en lo que se equivocaban mucho en clase y se insistió bastante). No obstante, dibujando el resultado aparece de inmediato. Y el tercero y último es un problema muy sencillito de proporcionalidad inversa. En este no hay interpretación geométrica si bien la función que se obtiene es una hipérbola.

Se esperaba que un 80% hicieran bien el de la elipse, un 50% el de la hipérbola y un 60% el de la bisectriz.

En total, y siendo optimista, en vísperas del examen esperaba unos 8-10 aprobados de los cuales 2-3 por encima del 7.5 y el resto (9-11) suspensos. Nota mínima 2 y máxima 9.

8.5. Resultados

Para analizar los resultados por un lado se ha dividido el examen en variables y por otro se cuenta con la nota final. Cada apartado del examen es una variable distinta y sirve para evaluar el conocimiento del alumno de cada uno de los distintos aspectos que se dieron en las clases y se pretendía que aprendieran. Al margen de los criterios de evaluación empleados para fijar la nota, se considera cada apartado por separado como un sabe/no sabe en función de la respuesta del alumno al mismo. Si está en blanco, o hay errores muy evidentes está claro que no sabe. Si hay un dibujo y planteamientos matemáticos acordes al enunciado, entonces se considera que sí que sabe. La duda puede surgir en los términos medios pero en las muestras obtenidas los casos son mínimos.

La nota medía del examen es de 4.4 con una desviación estándar de 2.4, ambos sobre 10. Hubo 5 aprobados, un 26 %. La nota máxima es de 8.85 y la mínima de 0.5. A continuación se presenta un histograma con la distribución de las notas.

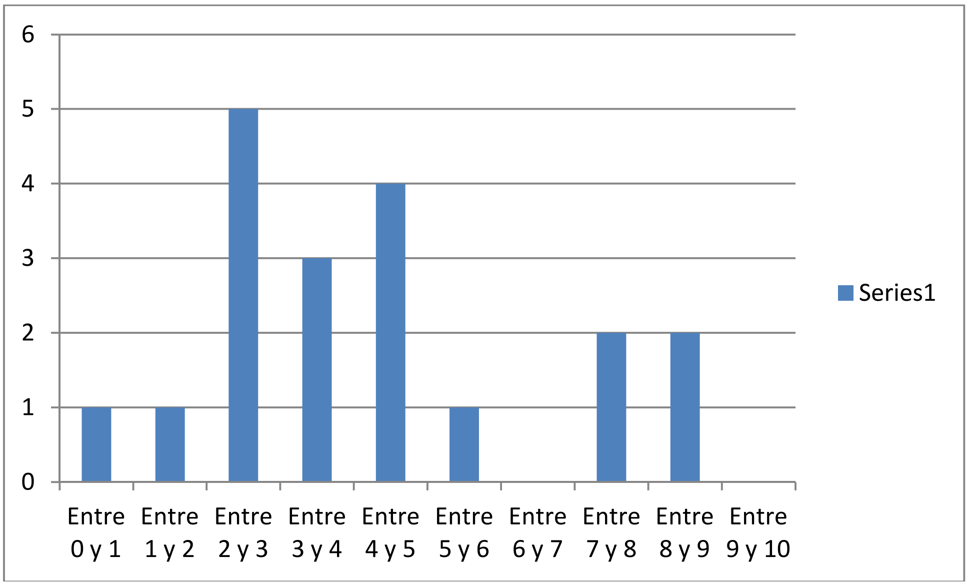


Figura 20: Histograma de las notas de los alumnos en el examen

Sorprende el hecho de que tan sólo 1 persona ha obtenido una nota entre 5 y 7, mientras que 4 han sacado más de 7 y el resto han suspendido.

A continuación se determinan las diversas variables de estudio y se muestran los resultados.

- V01: Conocer las 4 cónicas por qué son lugares geométricos. Teórica.
- V02: Citar 2 aplicaciones de las cónicas. Teórica.
- V03: Resolver problema descontextualizado: parábola de eje el OY.
- V04: Intersección recta-parábola descontextualizada. Sistema ecuaciones no-lineal. Depende de V03.
- V05: Diferenciar una función de una relación. Teórica-práctica. Depende de V03.
- V06: Reconocer y calcular la mediatriz contextualizada.
- V07: Reconocer y calcular la parábola contextualizada.
- V08: Intersección lugares geométricos previos. Depende de V06 y V07.
- V09: Dibujar y reconocer los elementos de la elipse partiendo de su ecuación reducida.
- V10: Resolver problema descontextualizado: bisectriz ejes de coordenadas. Similar al V03 pero más complicado.
- V11: Problema contextualizado de proporcionalidad inversa.

Se puede observar que casi todos los alumnos han respondido correctamente a las dos preguntas de teoría.

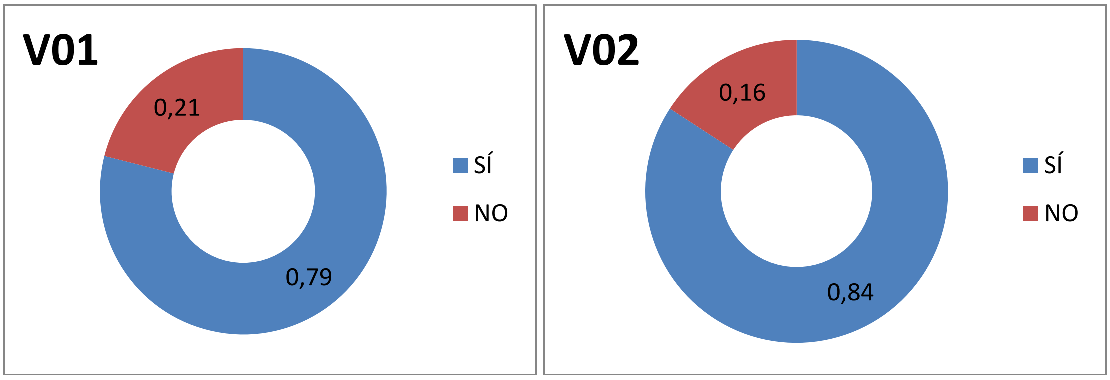


Figura 21: Respuesta de los alumnos a las variables de estudio V01 y V02

Tan solo la mitad de los alumnos son capaces de plantear y resolver adecuadamente el ejercicio 2.a. Un resultado un tanto bajo. Así pues, no es de extrañar que el porcentaje se reduzca en lo que respecta a las dos preguntas siguientes, porque responderlas correctamente depende de haber resuelto bien la primera.

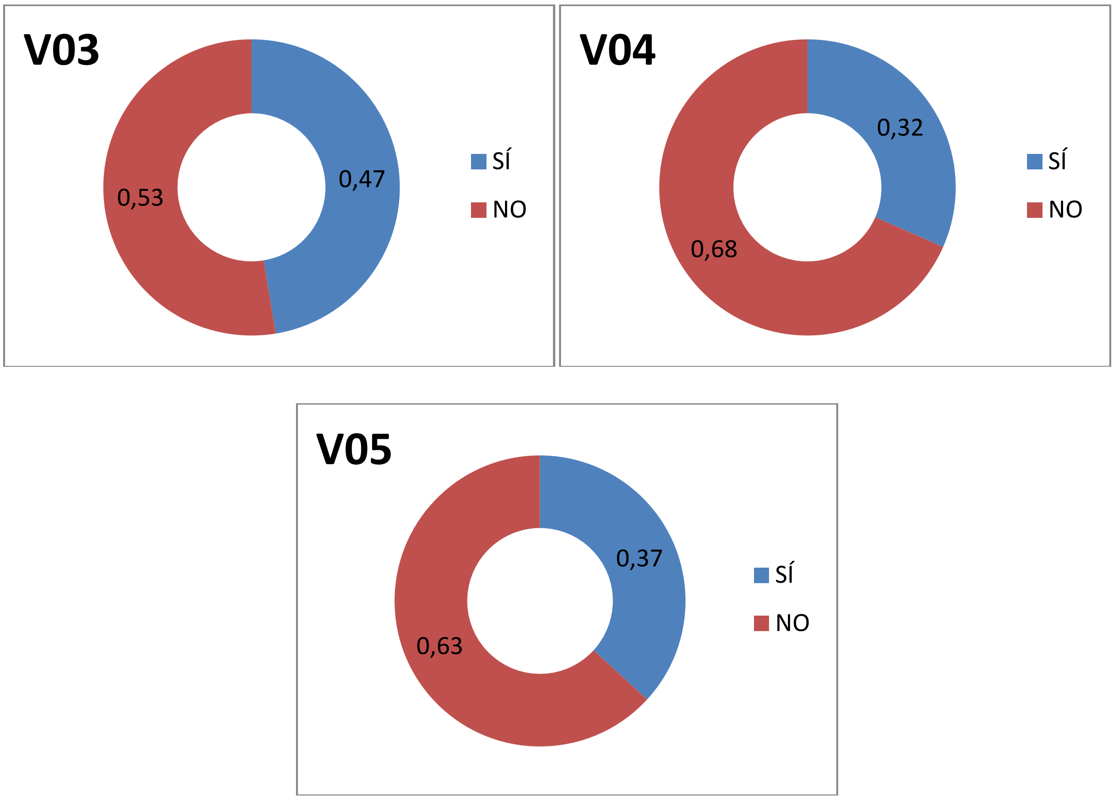


Figura 22: Respuesta de los alumnos a las variables de estudio V03, V04 y V05

La inmensa mayoría acierta con el apartado 3.a, quizás porque el enunciado lo deja más que claro. Los porcentajes se reducen significativamente en el 3.b y el 3.c, lo cual es perfectamente normal, estas eran a priori las preguntas más difíciles del examen.

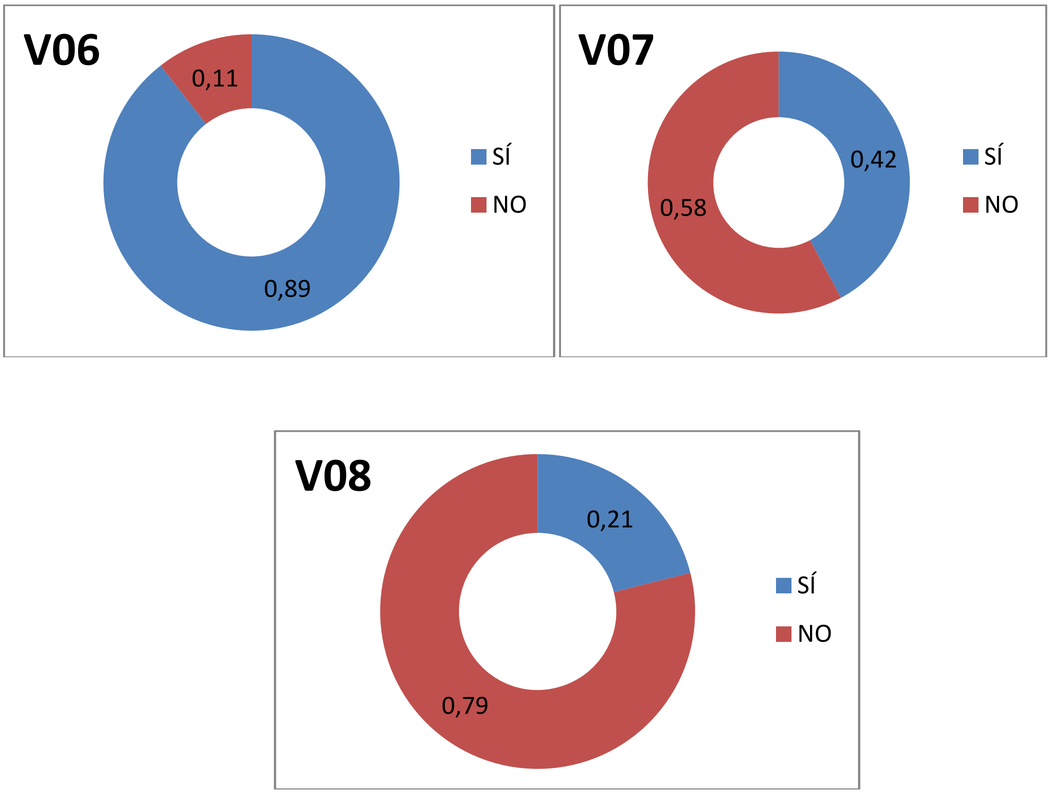


Figura 23: Respuesta de los alumnos a las variables V06, V07 y V08

También se pensaba un mayor porcentaje de aciertos en el 4.a, el de la elipse, que se queda en un 63%. En cuanto a la bisectriz de los ejes coordenados, el porcentaje es menor que el que aparece con la parábola (V03, 47%). Finalmente, otro problema que se consideraba 'regalo' tan sólo lo hacen bien un 32% de la clase, el de la proporcionalidad inversa.

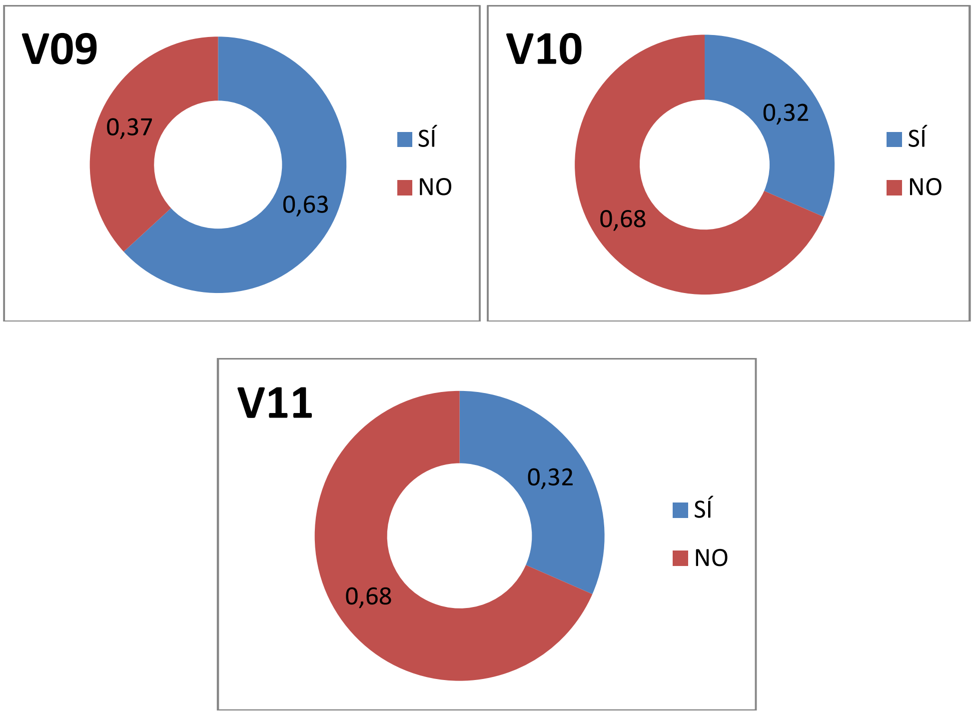


Figura 24: Respuesta de los alumnos a las variables V09, V10 y V11

La siguiente gráfica aglutina todas las variables estudiadas y permite obtener una mejor visión de conjunto. En ella puede apreciarse que tanto la teoría como la mediatriz contextualizada son los problemas que más aciertos tienen. Junto con estos tan sólo el de la elipse ha sido realizado satisfactoriamente por más de la mitad de los estudiantes. El problema con menos aciertos es el 3.c, el que a priori se esperaba que lo fuera.

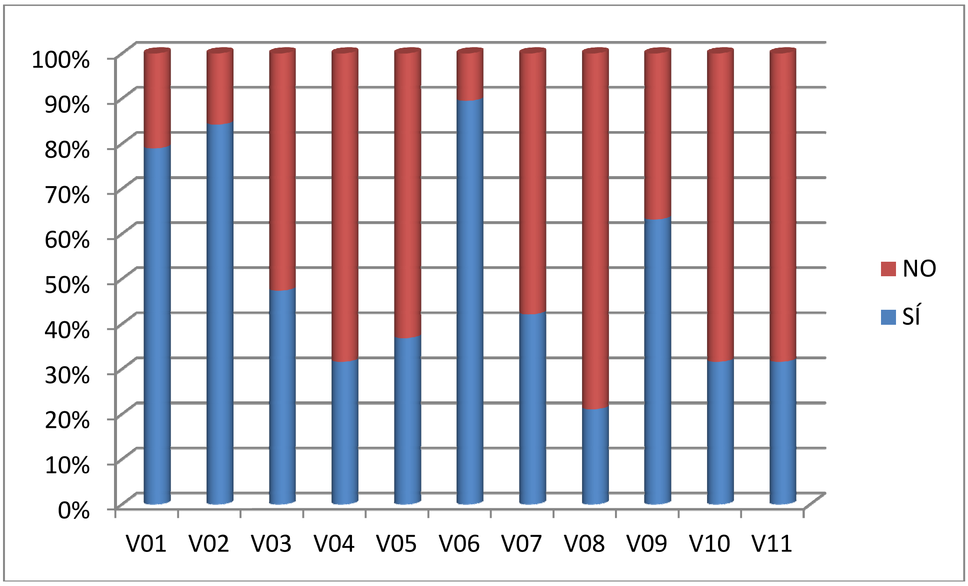


Figura 25: Gráfico que muestra la respuesta porcentual de la clase a todas las variables

8.6. Discusión de los resultados

Aunque a priori pueden parecer unos resultados malos si se atiende a la media y al número de aprobados, la variabilidad y el número reducido de la muestra tampoco ayudan a sacar conclusiones muy generales. Hubiera estado bien contrastar las notas de esta clase con las notas de otra sección, sobre todo para ver la influencia del dibujo técnico, pero no se disponen de estos datos.

No obstante sí que se pueden extraer aspectos muy interesantes. El primero de ellos es que tanto el tema (y a la postre el examen) suponen una dificultad considerable para la mayoría de la clase. Puede ser que se haya pretendido llegar demasiado lejos, lo cual nunca está mal, pero si me hubiera limitado a seguir el libro sin salirme de sus problemas descontextualizados y sus fórmulas es posible que el examen hubiera salido algo mejor pero les habría servido de mucho menos y a estas alturas tendrían todo olvidado.

Los resultados muestran que los estudiantes conocen qué es un lugar geométrico, algunas aplicaciones y lo saben aplicar en situaciones contextualizadas y sencillas (89% aciertan la mediatriz, igualar distancia punto-punto a otra distancia punto-punto). En cuanto aparecen elementos geométricos más complejos como las rectas este porcentaje cae, dando igual que el problema este contextualizado o descontextualizado. Este conocimiento es mucho más rico que el de saber dibujar y reconocer una elipse, por ejemplo.

Respecto a este último, se dedicó una clase y media al mismo con dos ejercicios como mucho y un 60% de los alumnos lo hicieron bien. Es un concepto mucho más sencillo y mecánico.

La sorpresa la marca el problema de proporcionalidad inversa. En clase también sólo se hizo uno de ellos. No tiene que ver mucho con la geometría y el enfoque que se venía dando en el tema pero tampoco esperaba unos resultados tan bajos.

En cuanto a la diferencia entre función y relación, se ve que hay una relación entre los que calculan la parábola (V03) correctamente y determinan que es una función y no es una relación. Este es un resultado satisfactorio.

Finalmente, aunque los resultados son muy interesantes y dan bastante juego, partiendo de una idea del director de este TFM, Gustavo, se elaboró un cuestionario específico para evaluar la comprensión por parte de los alumnos de lo qué es un lugar geométrico. Ha sido una lástima que no haya podido plantearse a ningún alumno pero se anexa al final de este documento porque se considera que puede ser muy útil para futuras investigaciones.

Capítulo 9: Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

9.1. Breve síntesis

En este trabajo fin de máster se ha pretendido analizar el tema de la docencia de los lugares geométricos y las cónicas en 1º de Bachiller. Toda la información analizada se extrae dentro de un contexto de prácticas universitarias del máster realizadas durante cinco semanas de los meses de abril y mayo del año 2012 en el colegio San Ignacio de Pamplona.

El análisis comienza con una revisión de la legislación en lo que a los lugares geométricos y las cónicas se refiere en base a unos descriptores previamente seleccionados. A continuación se analiza el efecto de dichas leyes en los libros de texto que diariamente se emplean en el centro, especialmente en lo referente a ejercicios, problemas y situaciones.

La segunda parte del proyecto se ha analizado la docencia del tema de lugares geométricos y cónicas llevada a cabo con la clase de 1º Bachiller A del colegio. Para ello se ha considerado revisar la unidad didáctica del libro de texto con un mayor detalle, se han estudiado los posibles errores y dificultades que pueden aparecer, se detallan las clases preparadas y dadas y finalmente se evalúa su impacto mediante un examen del que se extraen importantes conclusiones.

9.2. Conclusiones generales del trabajo

La primera y principal conclusión a la que llego con este trabajo es la importancia de la forma de proceder a la hora de preparar una unidad didáctica. En este caso comencé por plantear unos objetivos, fijar un examen y después preparar las clases para que los alumnos llegaran a aprobar ese examen. Sin embargo, hubo multitud de cambios de las clases que inicialmente me preparé a las que detallo en este documento. Esto fue debido a dos factores: mi falta de experiencia y sobre todo el adecuarme al ritmo de la clase. Gracias a la confianza y apoyo de mi tutor tuve la oportunidad de equivocarme y aprender mucho de mis errores. Cada clase es un mundo y no se puede tirar de ella constantemente en cada sesión. Hay que plantear ejercicios y problemas y ver cómo los afrontan de forma constante, pasarse por las mesas, resolver dudas y tener siempre muy claro dónde se está y a dónde se quiere llegar. Si se coloca una piedra mal en el muro de su aprendizaje hay que derribarlo todo. A mí personalmente me sucedió, sentí la inercia de querer dar temas que aparecían en el libro, como el de la obtención de la parábola en función de un parámetro (Anexo A, Pág. 220 del libro) y perdí más de media clase en explicar algo que luego no iba a preguntar.

Respecto al tema de cónicas y lugares geométricos sorprende su ‘aislamiento’ en el currículo como puede apreciarse en los primeros capítulos del trabajo. Apenas se da nada en cursos anteriores ni en posteriores y el nivel con el que llegan los alumnos es muy bajo (en relación a lo que se exige). No es de extrañar que muchos centros no lo den dado que no entra en selectividad, prefiriendo avanzar con otros temas como números imaginarios o integrales. Además entender bien la noción de lugar geométrico requiere de muchos objetos matemáticos que al estudiante le cuestan: generalizar el concepto de distancia haciéndolo funcional, manejo algebraico, ecuaciones no lineales, etc.

Sin embargo, es un tema muy útil e interesante (para el estudiante). Es útil porque si el alumno lo entiende fija unas bases estupendas para entender la geometría analítica (que sí entra en selectividad), además si se preparan problemas contextualizados enseñan a los alumnos nuevas formas de afrontar y resolver problemas. Y es interesante porque como estamos rodeados de cónicas, es un tema propicio a acercar a las matemáticas al mundo cotidiano del estudiante.

Por último quisiera destacar el asunto de los problemas contextualizados. Casi desde el principio me obcequé con los mismos y aun sabiendo que podía resultar difícil para los estudiantes tuve la oportunidad de desarrollarlo al considerar que era mucho más rico que seguir únicamente las hojas del libro. Enseñar a resolver problemas contextualizados es muy difícil, y antes hay que realizar problemas y ejercicios sacados de contexto. La experiencia demuestra que terminan por responder muy bien a este tipo de problemas, que a la postre son los que la vida les deparará.

9.3. Cuestiones abiertas

Al término de este trabajo se plantean dos cuestiones abiertas evidentes. La primera está relacionada con la resolución de problemas contextualizados no sólo relacionados con los lugares geométricos y las cónicas sino con la geometría analítica en general. Este proyecto supone un primer acercamiento al tema desde una perspectiva docente y supone un buen punto de partida para futuras investigaciones.

La segunda cuestión abierta está relacionada con un estudio más profundo de cómo los alumnos entienden y aplican la noción de lugar geométrico. Para esta el cuestionario adjunto en el anexo C puede suponer un punto de partida valiosísimo. Este trabajo toca las dos cuestiones aquí planteadas como una introducción docente, pero no con la profundidad que tal vez requerirían.

Referencias

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 282-307.

Bruño, G. M. (1927). *Elementos de geometría.* París: Librería de la Vda de Ch. Bouret.

Godino, J. D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2009). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(Especial), 133-156.

González Pérez, G. (2008). *Matemáticas 4º E.S.O. Opción A.* Madrid: Editex.

Hohenwarter, M., & al, e. (n.d.). *Geogebra*. Retrieved 2012, from www.geogebra.org

Martínez Mediano, J. M., Cuadra López, R., & Barrado Chamorro, F. J. (2007). *Matemáticas 1º Bachillerato.* Madrid: McGraw Hill.

Martínez, B., Montesinos, P., González, F., & López, C. (2007). *Matemáticas 3º E.S.O.* Madrid: McGraw Hill.

MEC. (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre. BOE 293, de 8 de diciembre, 43053-43102.*

MEC. (2007a). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. BOE 5, de 5 de enero, 677-773.*

MEC. (2007b). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre. BOE 266, de 6 de noviembre, 45831-45477.*

VV.AA. (2009). *Matemáticas II bachillerato.* Barcelona: Edebé.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto

En el **CD** y en el **CEO (centro de enseñanza on-line)** creados para este proyecto podrás encontrar el siguiente material adicional:
Enlaces, bibliografía y actividades interactivas (lugares geométricos y cónicas).

11.1 Definición de lugar geométrico

Se llama **lugar geométrico** a un conjunto de puntos que cumplen una deter-
minada propiedad.

Así, por ejemplo, son lugares geométricos:

1. los puntos del plano que equidistan de los puntos $A(1, -1)$ y $B(2, 0)$.
2. los puntos del plano cuya distancia al punto $A(2, 3)$ es doble que la distancia a la
$x - y + 2 = 0$.

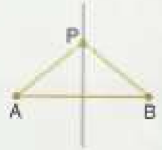


Fig. 11.1.

Una vez descrita la *propiedad*, intentaremos encontrar su expresión matemática.

Algunos lugares geométricos los hemos estudiado antes desde otro punto de vista:
usuales son la *mediatriz de un segmento* y la *bisectriz de un ángulo*.

- La **mediatriz** de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos del
equidistan de los extremos A y B. Esto es, si P es un punto de la mediatriz
$d(P, A) = d(P, B)$. (Como sabes, la mediatriz es la recta perpendicular al segm
punto medio.)
Por ejemplo, determinemos la mediatriz del segmento de extremos $A(1, -1)$
(Fig. 11.2).
Si $P(x, y)$ es un punto de ella, la *propiedad* $d(P, A) = d(P, B)$ se traduce en

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$$

Elevando al cuadrado y agrupando términos semejantes:

$$(x-1)^2+(y+1)^2 = (x-2)^2+(y-0)^2 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1 = x^2-4x+4+y^2$$
$$2x+2y-2=0$$

resulta la ecuación $x + y - 1 = 0$.

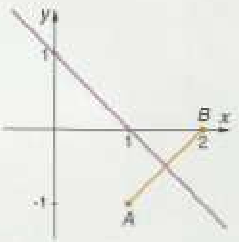


Fig. 11.2.

- La **bisectriz** del ángulo determinado por dos rectas es el lugar geométrico de
del plano que equidistan de dichas rectas. Esto es, si P es un punto de la bisectriz
rificará $d(P, r) = d(P, s)$. (Como sabes, la bisectriz de un ángulo es la recta que
por el vértice divide al ángulo en dos partes iguales.)

Para practicar vamos a calcular la bisectriz del ángulo determinado por las rectas

$$r: x + y - 1 = 0 \ \text{ y } \ s: 7x - y + 2 = 0.$$

Si $P(x, y)$ es un punto de dicha bisectriz la *propiedad* $d(P, r) = d(P, s)$ se traduce en

$$\left|\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{7x-y+2}{\sqrt{50}}\right| \Rightarrow \frac{x+y-1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{7x-y+2}{5\sqrt{2}}.$$

De $\dfrac{x+y-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{7x-y+2}{5\sqrt{2}}$ obtenemos una bisectriz: la recta $2x - 6y + 7 = 0$.

De $\dfrac{x+y-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{7x-y+2}{5\sqrt{2}}$ obtenemos la otra bisectriz: la recta $12x + 4y - 3 = 0$

Fig. 11.3.

Que dos expresiones sean iguales en valor absoluto equivale a que sean iguales u opuestas.

$$|A| = |B| \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ \text{ó} \\ A = -B \end{cases}$$

11. Lugares geométricos. Cónicas
11.2 Circunferencia

11.2 Circunferencia

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *centro*. La distancia del centro a un punto de la circunferencia se llama *radio*.

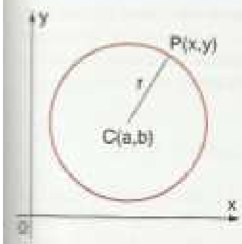


Fig. 11.4.

Si el centro de la circunferencia es el punto $C(a, b)$ y su radio r, cualquier punto $P(x, y)$ de la circunferencia verificará la *propiedad* $d(P, C) = r$; es decir:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

que es la **ecuación** de la circunferencia.

Desarrollando esta expresión se obtiene:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

Llamando $m=-2a$, $n=-2b$, $p=a^2+b^2-r^2$, obtenemos:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0.$$

Si se representa la circunferencia mediante esta última ecuación:

su **centro** es el punto $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$; su **radio** es $r=\sqrt{\left(-\frac{m}{2}\right)^2+\left(-\frac{n}{2}\right)^2-p}$.

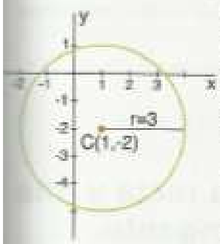


Fig. 11.5.

Veamos dos casos:

a) La circunferencia de radio $r=3$ y centro $C(1, -2)$ tiene por ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$ o desarrollando esta expresión, si se prefiere, $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

b) La ecuación $x^2+y^2-6x+8y=0$ representa una circunferencia de centro $C(3, -4)$ y radio $r=5$, pues:

$$C\left(-\frac{-6}{2}, -\frac{8}{2}\right)=(3,-4) \text{ y } r=\sqrt{\left(-\frac{-6}{2}\right)^2+\left(-\frac{8}{2}\right)^2-0}=\sqrt{25}=5$$

A este resultado puede llegarse completando cuadrados. Observa:

$$x^2+y^2-6x+8y=0 \Leftrightarrow (x^2-6x+9)-9+(y^2+8y+16)-16=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=5^2$$

Más datos...

La circunferencia de radio r y centro en el origen tiene por ecuación $x^2+y^2=r^2$.

Por ejemplo, $x^2+y^2=4$ designa la circunferencia con centro en (0, 0) y radio 2.

No todas las expresiones del tipo: $x^2+y^2+mx+ny+p=0$ representan una circunferencia. Para que ello ocurra ha de verificarse que

$$\left(-\frac{m}{2}\right)^2+\left(-\frac{n}{2}\right)^2-p>0.$$

Así, la expresión $x^2+y^2+2x-y+2=0$ no representa una circunferencia: su radio sería

$$r=\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2}=\sqrt{-\frac{3}{4}}$$

que no es un valor real.

Ejemplo 1

Encuentra la circunferencia concéntrica con $x^2+y^2-3x+2y+2=0$ que tenga radio $\sqrt{5}$.

El centro de la circunferencia dada es $C\left(-\frac{-3}{2}, -\frac{2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}, -1\right)$. La circunferencia buscada tendrá por ecuación $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+y^2-3x+2y-\frac{7}{4}=0 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2-12x+8y-7=0.$

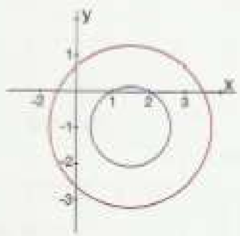


Fig. 11.6.

Actividades

1> Encuentra una circunferencia concéntrica con $x^2+y^2+2x+y-1=0$ que pase por el punto $P(2, -1)$.

R: $x^2+y^2+2x+y-8=0$

209

11.3 Determinación de una circunferencia

En general, se necesitan tres puntos o tres condiciones para determinar la ecuación de una circunferencia, pues son tres los coeficientes que es preciso conocer en cualquiera de las formas de expresar la circunferencia que hemos visto. (En el primer caso a, b y r; en el segundo, m, n y p.)

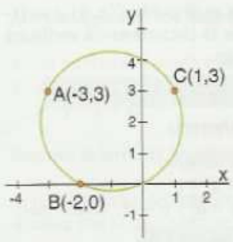


Fig. 11.7.

Así, para determinar la circunferencia que pasa por los puntos $A(-3, 3)$, $B(-2, 0)$ y $C(1, 3)$, sustituimos en la ecuación $x^2+y^2+mx+ny+p=0$ las coordenadas de cada uno de los puntos A, B y C. Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 9+9-3m+3n+p=0 \\ 4+0-2m+0+p=0 \\ 1+9+m+3n+p=0 \end{cases}$$, cuya solución es $m=2$,

$n=-4$ y $p=0$. Luego, la circunferencia pedida tiene por ecuación $x^2+y^2+2x-4y=0$. Su centro es el punto $(-1, 2)$ y su radio $r=\sqrt{5}$.

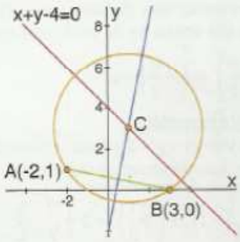


Fig. 11.8.

También podemos determinar la circunferencia que pasa por los puntos $A(-2, 1)$, $B(3, 0)$ y tiene su centro en la recta $x+y-4=0$ (Fig. 11.8), pues:

El centro de la circunferencia está en la mediatriz del segmento AB, que es la recta $5x-y-2=0$. Si, además, está en la recta $x+y-4=0$, es la solución del sistema

$$\begin{cases} 5x-y-2=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$$. Luego, el centro es el punto $C(1, 3)$. El radio es, por ejemplo, $r=d(A, C)=$

$=\sqrt{13}$. Así, la circunferencia pedida tiene por ecuación $(x-1)^2+(y-3)^2=13$.

11.4 Posición relativa de una recta y una circunferencia. Recta tangente

Dada una circunferencia y una recta, ésta puede ser **exterior** a la circunferencia (no tienen puntos en común), **tangente** a la circunferencia (tienen un punto en común) o **secante** (dos puntos en común).

Fig. 11.9.

Para determinar la posición relativa de una recta y una circunferencia basta resolver el sistema que forman sus respectivas ecuaciones.

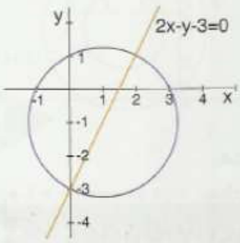


Fig. 11.10.

Por ejemplo, la recta $2x-y-3=0$ es secante a la circunferencia $x^2+y^2-2x+2y-3=0$, pues el sistema formado por las dos ecuaciones tiene dos soluciones, $P_1(0, -3)$ y $P_2(2, 1)$, que son las coordenadas de los puntos de corte con la circunferencia. (Véase la Figura 11.10)

▸▸▸ Recta tangente y normal a una circunferencia

Como sabrás, la **recta tangente** a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia. Por tanto, el radio está contenido en la recta que pasa por el centro de la circunferencia $C(a, b)$ y por el punto $P(x_0, y_0)$ de tangencia. Como esta recta tiene por vector director el $\vec{CP}(x_0 - a, y_0 - b)$, su pendiente es $m = \dfrac{y_0 - b}{x_0 - a}$.

Por tanto, la pendiente de la tangente (por ser perpendicular) será $-\dfrac{1}{m} = -\dfrac{x_0 - a}{y_0 - b}$.

Luego, la ecuación de la **recta tangente** a la circunferencia $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ en el punto $P(x_0, y_0)$ viene dada por la fórmula:

$$y - y_0 = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}(x - x_0)$$

La **recta perpendicular** a la tangente en el punto de tangencia se llama **recta normal**. Su ecuación es:

$$y - y_0 = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}(x - x_0)$$

Veamos un ejemplo. La ecuación de la recta tangente y normal a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ en el punto $P(6, 0)$ (Fig.11.11) se obtiene así:

1. Se halla el centro de la circunferencia, que es el punto $C(2, 3)$.
2. Utilizando la fórmula anterior, la ecuación de la recta tangente en el punto $P(6, 0)$ es $y - 0 = -\dfrac{6-2}{0-3}(x-6) \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{3}(x-6)$.
3. La recta normal, al ser perpendicular a la tangente, tendrá por pendiente $m = -\dfrac{3}{4}$; y su ecuación es $y = -\dfrac{3}{4}(x-6)$.

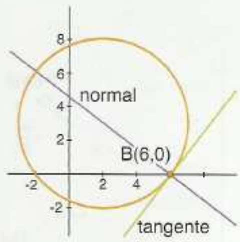


Fig. 11.11.

Ejemplo 2

Halla las ecuaciones de la rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ paralelas a la recta s: $x + 2y + 6 = 0$.

El centro de la circunferencia es el punto $C(2, -3)$ y su radio $r = \sqrt{5}$. Las rectas paralelas a s son de la forma $x + 2y + D = 0$. Para que sean tangentes a la circunferencia, su distancia al centro ha de ser igual al radio, es decir,

$$\left|\frac{2 + 2\cdot(-3) + D}{\sqrt{5}}\right| = \sqrt{5} \Rightarrow -4 + D = \pm 5 \Rightarrow D = \begin{cases} 9 \\ -1 \end{cases}.$$

Las rectas buscadas son: $\begin{cases} s_1 : x + 2y + 9 = 0 \\ s_2 : x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$.

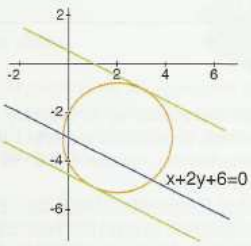


Fig. 11.12.

Actividades

2> Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ perpendiculares a la recta s: $x - y + 3 = 0$.

R: $x + y + 3 = 0$; $x + y - 5 = 0$

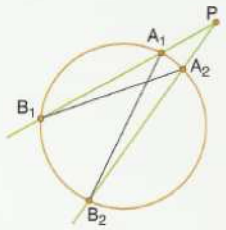


Fig. 11.13.

11.5 Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Se define la potencia del punto P respecto de la circunferencia C como el producto de las longitudes de los dos segmentos determinados por P y los puntos de corte de cualquier recta secante a la circunferencia que pase por P.

$$\text{Pot}_C(P) = \overline{PA_1} \cdot \overline{PB_1}$$

- La potencia de un punto P respecto de una circunferencia C es constante, es decir no depende de la recta considerada. En efecto, los triángulos PA_1B_2 y PA_2B_1 son semejantes (comparten el ángulo $\hat{P}$ y además $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ pues abarcan el mismo arco). Luego $\frac{PA_1}{PB_2} = \frac{PA_2}{PB_1} \Rightarrow \overline{PA_1} \cdot \overline{PB_1} = \overline{PA_2} \cdot \overline{PB_2}$.

Sea r el radio de la circunferencia y d la distancia del punto P al centro de la circunferencia. Si elegimos una recta que pase por el centro será

$$\text{Pot}_C(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = (d - r)\cdot(d + r) = d^2 - r^2 = \underbrace{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}_{d^2} - r^2 .$$

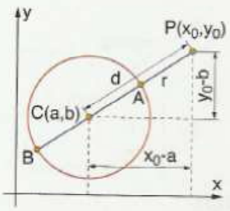


Fig. 11.14.

Es decir, *la potencia de un punto respecto de una circunferencia se obtiene sustituyendo en la ecuación de la circunferencia las coordenadas generales por las particulares del punto dado.*

Por ejemplo, la potencia del punto $P(1, -2)$ respecto de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

es $\text{Pot}_C(P) = 1^2 + (-2)^2 - 4\cdot1 - 6\cdot(-2) - 12 = 1$.

En particular, si el punto considerado es el origen O, su potencia respecto de la circunferencia C vale $\text{Pot}_C(0) = a^2 + b^2 - r^2 = p$, es decir, *el término independiente de la ecuación de la circunferencia es la potencia del origen respecto de dicha circunferencia.*

De la relación $\text{Pot}_C(P) = d^2 - r^2$ se deduce también que:

- Si P es exterior a la circunferencia, $d > r$, la potencia es positiva.
- Si P es interior a la circunferencia, $d < r$, la potencia es negativa.
- Si P está en la circunferencia, $d = r$, la potencia es nula.

Por ejemplo, para determinar la situación de los puntos $P(6, 2)$, $Q(5,5)$ y $R(1, 6)$ con relación a la circunferencia $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$, se halla la potencia de cada punto a la circunferencia.

Como $\text{Pot}_C(P(x_0, y_0)) = (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 - 5^2$, siendo (x_0, y_0) las coordenadas del punto considerado, se tiene:

$\text{Pot}_C(P(6, 2)) = (6-2)^2 + (2-1)^2 - 5^2 = 16 + 1 - 25 = -8 < 0 \Rightarrow P$ es interior a C.
$\text{Pot}_C(Q(5, 5)) = (5-2)^2 + (5-1)^2 - 5^2 = 9 + 16 - 25 = 0 \Rightarrow Q$ pertenece a C.
$\text{Pot}_C(R(1, 6)) = (1-2)^2 + (6-1)^2 - 5^2 = 1 + 25 - 25 = 1 > 0 \Rightarrow R$ es exterior a C.

@

Para profundizar en el concepto de potencia de un punto respecto a una circunferencia, puedes entrar en la página web:
http://descartes.cnice.mec.es/Descartes1/Geometria/Potencia punto respecto circunferencia/Potencia de un punto respecto circunferencia.htm

11.6 Elipse

Las tres curvas que estudiamos a continuación (**elipse**, **hipérbola** y **parábola**) se denominan, genéricamente, **cónicas**, pues son las secciones producidas en una superficie cónica por un plano que no pase por el vértice. Si el plano secante corta a todas las generatrices de la superficie, la cónica resultante es una *elipse* (Fig.11.15).

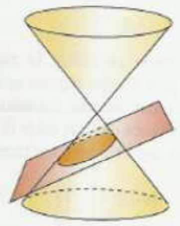


Fig. 11.15.

>> La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, F y F', llamados focos, es constante.

Por tanto, si P pertenece a la elipse, se cumple: $d(P, F) + d(P, F') = \text{constante}$.

A. Elementos de una elipse

- Se llama **eje focal** a la recta que pasa por los dos focos.
- El **eje secundario** es la mediatriz del segmento que determinan los focos. La elipse es simétrica respecto de ambos ejes.
- El **centro** es el punto de corte de los dos ejes.
- Los **vértices** de la elipse A, A', B, B' son los puntos de corte de ésta con los ejes. El segmento AA' se llama **eje mayor** de la elipse y se representa por $2a$. El **semieje mayor** es a. Al segmento BB' se le llama **eje menor** se representa por $2b$. El **semieje menor** es b.
- La distancia entre los focos se llama **distancia focal** y se representa por $2c$: la **semidistancia focal** es c.

Fig. 11.16.

B. Ecuación reducida de la elipse

Consideremos un sistema de referencia cuyo eje de abscisas sea el eje focal de la elipse y cuyo origen coincida con el centro de la elipse.

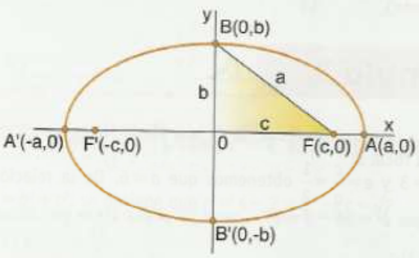


Fig. 11.17.

En dicho sistema de referencia los focos son los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. Los vértices tienen por coordenadas $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$.

Para cualquier punto de la elipse, la suma de sus distancias a los focos es constante, como dice su definición. Para el vértice A de la elipse, $d(A, F) + d(A, F') = \text{constante}$. Pero también, como podemos ver en la Fig. 11.17, $d(A, F) + d(A, F') = 2a$, luego la constante vale $2a$.

Para el vértice B de la elipse, según la propia definición:

$d(B, F) + d(B, F') = 2a \Leftrightarrow$ (al ser iguales) $2d(B, F) = 2a \Leftrightarrow d(B, F) = a$

Más datos...

Las expresiones de las ecuaciones de las cónicas dependen de la posición relativa de éstas respecto del sistema de coordenadas.

Para simplificar las expresiones de dichas ecuaciones supondremos que los ejes de las cónicas o bien coinciden con los ejes coordenados o bien son paralelos a ellos.

Aplicando el *teorema de Pitágoras* al triángulo *OFB* resulta la relación $a^2 = b^2 + c^2$.
Con esto, si $P(x, y)$ es un punto de la elipse podemos escribir:

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Pasamos una raíz al segundo miembro, elevamos al cuadrado y trasponemos términos:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 -$$

$$-4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx \Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Elevando al cuadrado: $a^2[(x+c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2 \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$
Y teniendo en cuenta la relación $a^2 = b^2 + c^2$, obtenemos: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$
Por último, dividiendo ambos miembros por $a^2 b^2$ resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es la **ecuación reducida** o **ecuación canónica** de la elipse.

Por ejemplo, si la elipse tiene por focos los puntos $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$ y de semieje mayor 5, de la relación $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 9$.

Luego, su ecuación reducida es: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (Fig.11.19).

En jardinería se utiliza la siguiente técnica para dibujar elipses: se ata una cuerda a dos estacas clavadas en el suelo y se hace deslizar sobre la cuerda otro palo que la mantenga tirante.

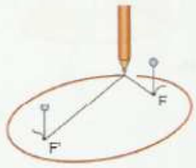


Fig. 11.18.

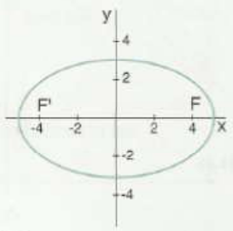


Fig. 11.19.

C. Excentricidad

Se llama excentricidad de una elipse al número $e = \frac{c}{a}$. Su valor está comprendido entre 0 y 1 $\Leftrightarrow 0 < e < 1$.

La Figura 11.20 muestra elipses con el mismo eje mayor. La excentricidad mide el achatamiento de la elipse: cuanto mayor sea la excentricidad mayor será su achatamiento. En los casos extremos, $e = 0$, la elipse es una circunferencia (nada achatada) y si $e = 1$, la elipse degenera en un segmento (achatamiento extremo).

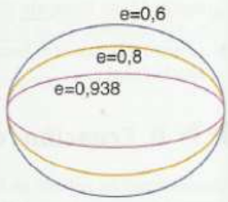


Fig. 11.20.

Si $a = b$, la ecuación de la elipse es $x^2 + y^2 = a^2$. Es decir, es una circunferencia.

Ejemplo 3

Determina la ecuación reducida de una elipse de excentricidad $e = \frac{1}{2}$ y semidistancia focal 3.

Como $c = 3$ y $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ obtenemos que $a = 6$. De la relación $b^2 = a^2 - c^2$ se deduce que $b^2 = 36 - 9 = 27$. Luego la elipse tiene por ecuación $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ (Fig.11.21).

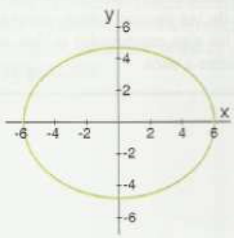


Fig. 11.21.

Actividades

3> Determina la excentricidad y la ecuación reducida de una elipse de semieje menor $b = \sqrt{3}$ si uno de sus focos es el punto $F(5, 0)$.

R: $\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{3} = 1$; $e = \frac{5}{\sqrt{28}} = 0{,}9449$.

D. Casos particulares

Mediante cálculos similares a los realizados para hallar la ecuación reducida, se obtienen las ecuaciones de los siguientes tipos de elipses:

1. Centrada en el origen y de eje mayor el eje de ordenadas

Su ecuación es: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, con $a>b$.

Por ejemplo, la ecuación de la elipse centrada en el origen, de focos $F(0,\ 4)$ y $F'(0,\ -4)$ y semieje mayor $a=5$ es $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ (Fig.11.22).

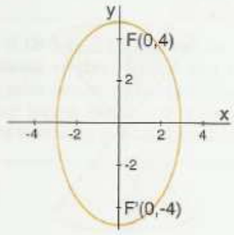


Fig. 11.22.

2. Centrada en el punto $P(x_0,\ y_0)$ y de eje mayor paralelo al eje OX

Su ecuación es: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, con $a>b$.

Por ejemplo, la ecuación de la elipse centrada en el punto $P(-1,\ 2)$, de eje mayor paralelo al eje OX, y cuyos ejes miden 16 y 8 es $\frac{(x+1)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$ (Fig.11.23).

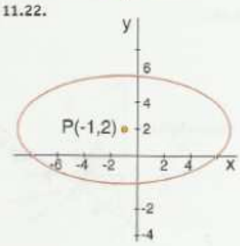


Fig. 11.23.

Observación: La ecuación anterior es equivalente a

$$(x+1)^2+4(y-2)^2=64 \Leftrightarrow x^2+4y^2+2x-16y-47=0.$$

Para obtener la ecuación inicial a partir de ésta se utiliza el procedimiento de completar cuadrados.

3. Centrada en el punto $P(x_0,\ y_0)$ y de eje mayor paralelo al eje OY.

Su ecuación es: $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$, con $a>b$.

Ejemplo 4

Halla el centro, los semiejes y la excentricidad de la elipse de ecuación $4x^2+8y^2+4x-16y-7=0$ (Fig. 11.24).

La ecuación puede escribirse así: $4(x^2+x)+8(y^2-2y)=7$. Completando cuadrados en el primer miembro, se tiene:

$$4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+8(y^2-2y+1)=7+1+8 \Leftrightarrow 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+8(y-1)^2=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{16}+\frac{8(y-1)^2}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}=1.$$

Luego, el centro es el punto $\left(-\frac{1}{2},1\right)$. Como $a^2=4$, el semieje mayor es $a=2$; el semieje menor es $b=\sqrt{2}$.

De la relación $a^2=b^2+c^2$, se obtiene que $c^2=4-2=2 \Leftrightarrow c=\sqrt{2}$.

La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

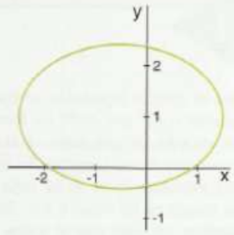


Fig. 11.24.

Actividades

4> Halla el centro, los semiejes y la excentricidad de la elipse de ecuación $x^2+2y^2+2x-8y-1=0$.

R: Centro $(-1,\ 2)$; $a=\sqrt{10}$, $b=c=\sqrt{5}$ y $e=\sqrt{\frac{1}{2}}=0{,}7071$.

11.7 Hipérbola

Cuando una superficie cónica es cortada por un plano paralelo a dos generatrices, la sección obtenida es una *hipérbola*.

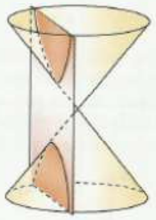


Fig. 11.25.

> La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que la diferencia de sus distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos, *F* y *F´*, llamados focos, es constante.

Esto es, si *P* pertenece a la hipérbola: $|d(P,F)-d(P,F')| = \text{constante}$.

A. Elementos de una hipérbola

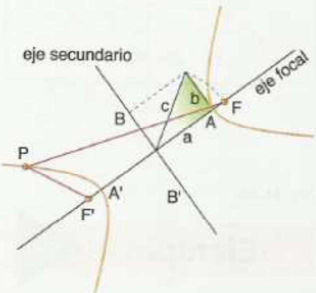


Fig. 11.26.

- Se llama **eje focal** a la recta que pasa por los dos focos.
- El **eje secundario** es la mediatriz del segmento que determinan los focos. La hipérbola es simétrica respecto de ambos ejes.
- El **centro** es el punto de corte de los dos ejes.
- La distancia entre los focos se llama **distancia focal** y se representa por $2c$:
- la **semidistancia focal** es c.
- Los **vértices** A, A', son los puntos de corte de la hipérbola con el eje focal. El segmento AA' se llama **eje real o mayor** de la hipérbola y se representa por $2a$. El **semieje real o mayor** es a.
- Al segmento BB' se le llama **eje imaginario o menor**. Se representa por $2b$. El **semieje menor** es b. Se define de modo que se verifique la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

B. Ecuación reducida de la hipérbola

Consideremos un sistema de referencia cuyo eje de abscisas sea el eje focal de la hipérbola y cuyo origen coincida con el centro de la hipérbola.

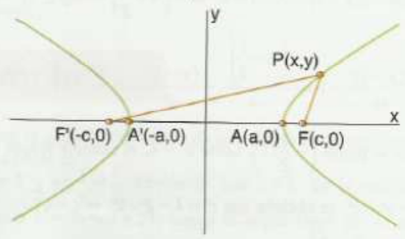


Fig. 11.27.

En dicho sistema de referencia los focos son los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. Los vértices tienen por coordenadas $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$.

Para cualquier punto de la hipérbola, la diferencia de sus distancias, en valor absoluto, a los focos es constante. En particular, como el vértice A es de la hipérbola, será $|d(A,F)-d(A,F')| =$ constante. Pero $|d(A,F)-d(A,F')| = 2a$, luego la constante vale $2a$.

Con esto, si $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola podemos escribir:

$$|d(P,F)-d(P,F')| = 2a \Leftrightarrow \left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a.$$

O, también,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

> **!** Así se dibujan hipérbolas: se fijan los puntos *F* y *F´* que serán los focos. En el extremo de una regla se ata una cuerda de menor longitud. Se sujetan los extremos libres de la regla y de la cuerda en los focos *F* y *F´*. Se hace deslizar un lápiz que se apoye en la regla, manteniendo la cuerda tirante.

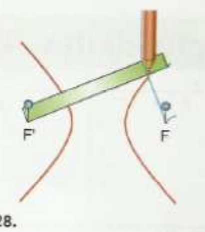


Fig. 11.28.

Pasamos una raíz al segundo miembro y elevamos al cuadrado

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4a^2-4cx=\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Leftrightarrow -a^2-cx=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Elevando de nuevo al cuadrado

$$(-a^2-cx)^2=a^2[(x+c)^2+y^2] \Leftrightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2),$$

y teniendo en cuenta la relación $c^2=a^2+b^2$, obtenemos: $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

Por último, dividiendo ambos miembros por a^2b^2 se obtiene:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1},$$

que es la **ecuación reducida** o **ecuación canónica** de la hipérbola.

Por ejemplo, si la hipérbola tiene por focos los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y semieje real 4, de la relación $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=5^2-4^2=9$.

Luego, su ecuación reducida es $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

En el **CD** y en el **CEO (centro de enseñanza on-line)** creados para este proyecto puedes realizar actividades sobre lugares geométricos y cónicas para reforzar lo que has aprendido.

C. Excentricidad

Se llama excentricidad de una hipérbola al número $e=\frac{c}{a}$. Su valor siempre es mayor que 1 $\Leftrightarrow e>1$.

La figura adjunta muestra hipérbolas con el mismo eje real y distintas excentricidades. La excentricidad de una hipérbola mide la curvatura de sus ramas: cuando disminuye, aumenta la curvatura de las ramas (el caso extremo, $e=1$, degenera en dos semirrectas).

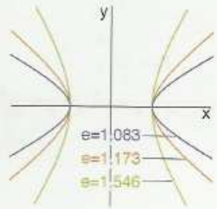


Fig. 11.29.

Ejemplo 5

Determina la ecuación reducida de una hipérbola de excentricidad $e=\frac{3}{2}$ y semieje imaginario 5.

De la relación $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$, obtenemos que $c=\frac{3}{2}a$.

Llevando esta relación a la igualdad $c^2=a^2+b^2$, obtenemos $\frac{9}{4}a^2=a^2+25 \Rightarrow a^2=20$.

Luego, la hipérbola tiene por ecuación $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{25}=1$.

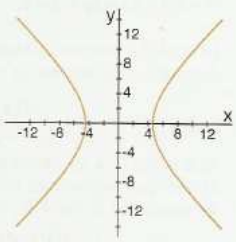


Fig. 11.30.

Actividades

5> Determina la excentricidad y la ecuación reducida de una hipérbola de semieje imaginario $b=3$, si uno de sus focos es el punto $F(5, 0)$.

R: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; $e=\frac{5}{4}=1{,}25$.

▶▶ D. Casos particulares

Mediante cálculos similares a los realizados para hallar la ecuación reducida, se obtienen las ecuaciones de los siguientes tipos de hipérbolas:

1. Centrada en el origen y de eje real el eje de ordenadas:

$$\text{Su ecuación es: } \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

Por ejemplo, la ecuación de la hipérbola centrada en el origen, de focos $F(0, 6)$ y $F'(0, -6)$ y semieje real $a=5$ es: $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{11}=1$ (Fig. 11.31).

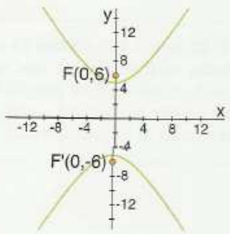


Fig. 11.31.

2. Centrada en el punto $P(x_0, y_0)$ y con eje real paralelo al eje OX:

$$\text{Su ecuación es: } \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Por ejemplo, la ecuación de la hipérbola centrada en el punto $P(-1, 3)$, de eje real paralelo al eje OX, y cuyos ejes miden 10 y $4\sqrt{3}$ es $\frac{(x+1)^2}{25}-\frac{(y-3)^2}{12}=1$ (Fig. 11.32).

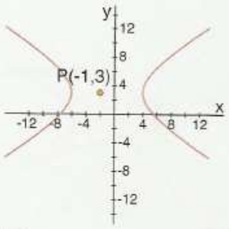


Fig. 11.32.

3. Centrada en el punto $P(x_0, y_0)$ y con eje real paralelo al eje OY.

$$\text{Su ecuación es: } \frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Por ejemplo, la ecuación de la hipérbola centrada en el punto $P(3, -2)$, de eje real paralelo al eje OY, y cuyos ejes miden 12 y 6 es $\frac{(y+2)^2}{36}-\frac{(x-3)^2}{9}=1$.

Ejemplo 6

Halla el centro, los semiejes y la excentricidad de la hipérbola de ecuación $x^2-2y^2+6x+8y+3=0$.

La ecuación puede escribirse así: $(x^2+6x)-2(y^2-4y)=-3$.
Completando cuadrados se tiene: $(x^2+6x+9)-2(y^2-4y+4)=-3+9-8 \Leftrightarrow (x+3)^2-2(y-2)^2=-2 \Leftrightarrow \frac{-2(y-2)^2}{-2}+\frac{(x+3)^2}{-2}=1 \Leftrightarrow \frac{(y-2)^2}{1}-\frac{(x+3)^2}{2}=1$, luego el centro es el punto $(-3, 2)$ y tiene eje real paralelo al eje OY; como $a^2=1$, el semieje real es $a=1$.
El semieje imaginario es $b=\sqrt{2}$.
De la relación $c^2=a^2+b^2$, se obtiene $c^2=1+2=3$, es decir, $c=\sqrt{3}$; por tanto la excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$.

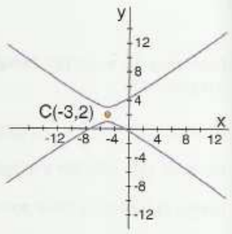


Fig. 11.33.

Actividades

6> Halla el centro, los semiejes y la excentricidad de la hipérbola de ecuación $x^2-4y^2+2x-8y-11=0$.

R: Centro $(-1, -1)$; eje real paralelo al eje OX; $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{10}$ y $e=\sqrt{\frac{5}{4}}=1{,}1180$.

▶▶ E. Asíntotas de una hipérbola

La ecuación reducida de la hipérbola, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, se puede escribir $y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$.

Cuando x crece, el término $\frac{a^2}{x^2}$ decrece y tiende a cero cuando x tiende a infinito. De aquí se deduce que cuanto mayor es el valor de x más se aproximan los valores de las ordenadas de la hipérbola a los de las rectas $y=\pm\frac{b}{a}x$. Se puede decir, entonces, que dichas rectas son tangentes a la hipérbola en el infinito o, simplemente, que ambas rectas son las **asíntotas** de la hipérbola.

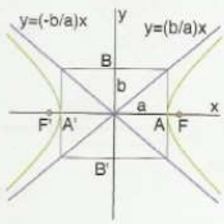


Fig. 11.34.

De la expresión $y=\pm\frac{b}{a}x$ se deduce, también, que *las asíntotas de una hipérbola son las rectas que contienen a las diagonales del rectángulo cuyo centro es el centro de la hipérbola y cuyos lados son paralelos e iguales a los ejes de la curva.*

Por ejemplo, las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ son las rectas $y=\frac{5}{6}x$ e $y=-\frac{5}{6}x$.

▶▶ F. Hipérbola equilátera

La hipérbola en la que los semiejes real e imaginarios son iguales, $a=b$, se llama, por la igualdad de sus semiejes, **hipérbola equilátera.**

Su ecuación tiene la forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow x^2-y^2=a^2$.

Sus asíntotas son las rectas $y=\pm x$, es decir son perpendiculares entre sí (observa que coinciden con las bisectrices de los cuadrantes).

Como $c^2=a^2+b^2=2a^2$, es $c=a\sqrt{2}$ y, por tanto, su excentricidad vale $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

▶▶ G. Ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas

Si queremos reducirla a sus asíntotas, lo cual es posible por ser estas perpendiculares, deberemos efectuar un giro de ejes de 45°, con el fin de que el eje OX se traslade a la asíntota OY'.

Al hacer este giro, los focos estarán en la bisectriz, luego sus dos coordenadas son iguales, $F(x, x)$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo OFH, dado que $d(O, F)=c=a\sqrt{2}$, es $x^2+x^2=\overline{OF}^2 \Leftrightarrow 2x^2=2a^2 \Rightarrow x=\pm a$. Luego los focos son $F(a, a)$ y $F'(-a, -a)$.

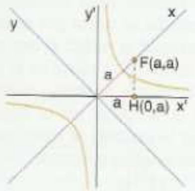


Fig. 11.35.

Si aplicamos de nuevo la definición de hipérbola, $|d(P,F)-d(P,F')|=2a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left|\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}-\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}\right|=2a$, repitiendo paso a paso las operaciones que hicimos para deducir la ecuación reducida, obtenemos la expresión $xy=\frac{a^2}{2}$, o llamando $k=\frac{a^2}{2}$, se obtiene $xy=k$, expresión que se conoce como **ecuación asintótica** de una hipérbola equilátera.

Por ejemplo, la ecuación asintótica de la hipérbola equilátera cuyos semiejes miden 6, es $xy=18$. Sus focos son los puntos $F(6, 6)$ y $F'(-6, -6)$; el valor de $c=6\sqrt{2}$.

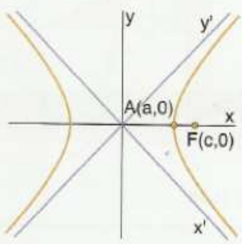


Fig. 11.36.

11.8 Parábola

Cuando una superficie cónica es cortada por un plano paralelo a una sola generatriz, la sección obtenida es una *parábola*.

Fig. 11.37.

> La **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano P que equidistan de un punto fijo F, llamado foco, y de una recta fija δ, llamada directriz.

Esto es, si P es un punto de la parábola se cumple que: $d(P,F)=d(P,\delta)$.

A. Elementos de la parábola

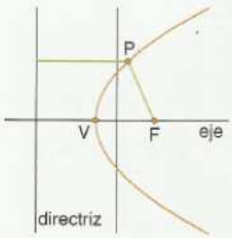


Fig. 11.38.

- La recta que pasa por el **foco** y es perpendicular a la directriz se llama **eje** de la parábola. La parábola es simétrica respecto de su eje.
- El **vértice** V es el punto de corte de la parábola y su eje.
- La distancia del vértice al foco se llama **distancia focal** y se representa por $\frac{p}{2}$. El número p, distancia del foco a la directriz, es el **parámetro** de la parábola.

B. Ecuación de una parábola

Tomemos el vértice de la parábola como origen de coordenadas y su eje como eje OX.

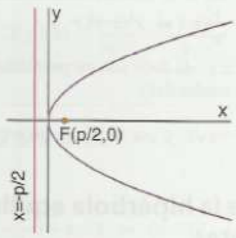


Fig. 11.39.

En este sistema de referencia el foco tiene por coordenadas $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ y la directriz es la recta $\delta: x=-\frac{p}{2}$.

Si el punto $P(x,y)$ es de la parábola, la relación $d(P,F)=d(P,\delta)$ equivale a

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|;$$

Elevando ambos miembros al cuadrado se tiene: $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$.
Al operar resulta la expresión:

$$y^2=2px,$$

que es la ecuación de la parábola.

Así, por ejemplo, la parábola de foco el punto $F(2,0)$ y directriz la recta $\delta: x=-2$, tiene por parámetro $p=4$, luego su ecuación es $y^2=2\cdot 4\,x=8x$.

!

Para dibujar una parábola se traza una recta δ y se fija un punto F.
En un extremo de la hipotenusa de una escuadra se sujeta una cuerda de longitud igual al cateto. El otro extremo de la cuerda se sujeta en el punto F. Un lápiz que mantenga tirante la cuerda y se apoye en la escuadra, dibujará la parábola al hacer deslizar la escuadra sobre la recta δ.

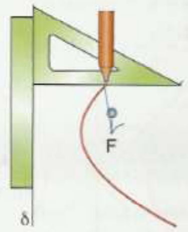


Fig. 11.40.

▶▶ C. Casos particulares

Mediante cálculos similares al anterior, se obtienen las ecuaciones de los siguientes tipos de parábolas:

1. De vértice el origen y su eje coincide con el eje OY:

Su ecuación es $x^2 = 2py$.

Por ejemplo, en la parábola de foco el punto $F(0, 3)$ y directriz $\delta : y = -3$, es $p = 6$, luego su ecuación es: $x^2 = 12y$.

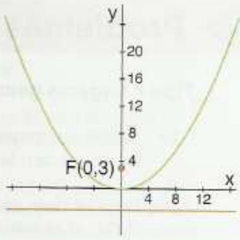


Fig. 11.41.

2. De vértice el punto $V(x_0, y_0)$ y eje paralelo al eje OX:

Su ecuación es: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Su foco es el punto $F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$; su directriz es la recta $\delta : x = x_0 - \frac{p}{2}$.

Así, la parábola de vértice el punto $V(2, -5)$, de parámetro $p = 1$, y eje paralelo al eje de abscisas tiene por ecuación $(y + 5)^2 = 2(x - 2)$

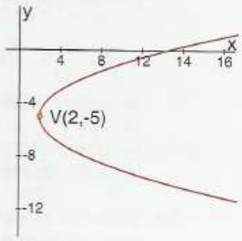


Fig. 11.42.

3. De vértice el punto $V(x_0, y_0)$ y eje paralelo al eje OY:

Su ecuación es: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

Su foco es el punto $F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$; su directriz es la recta $\delta : y = y_0 - \frac{p}{2}$.

Por ejemplo, la parábola de vértice el punto $V(1, -3)$, de parámetro $p = 1$, y eje paralelo al eje de ordenadas tiene por ecuación $(x - 1)^2 = 2(y + 3)$.

Si desarrollamos esta expresión se obtiene: $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}$.

Observación: En cursos anteriores ya has estudiado un tipo de parábolas: su ecuación era del tipo $y = ax^2 + bx + c$.
Su vértice, recuerda, es el punto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ y su eje la recta $x = -\frac{b}{2a}$.

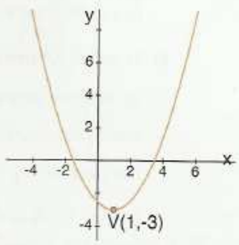


Fig. 11.43.

Ejemplo 7

Determina el foco, la directriz, el vértice y el eje de la parábola de ecuación $y^2 + 6x + 6y + 3 = 0$.

La ecuación se puede escribir así: $y^2 + 6y = -6x - 3$. Completando el cuadrado del primer miembro: $y^2 + 6y + 9 = -6x - 3 + 9 \Leftrightarrow (y + 3)^2 = -6(x - 1)$. Así, el vértice es el punto $V(1, -3)$, el eje la recta $y = -3$. Ya que $2p = -6$, es $p = -3$, luego el foco es el punto $F\left(1 - \frac{3}{2}, -3\right) = \left(-\frac{1}{2}, -3\right)$; la directriz es la recta $\delta : x = 1 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

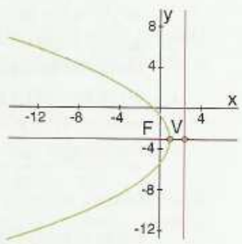


Fig. 11.44.

Actividades

7> Determina el foco, la directriz, el vértice y el eje de la parábola de ecuación $y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$.

R: Vértice $V(1, -1)$; eje $y = -1$; foco $F(2, -1)$ y directriz $\delta : x = 0$.

Problemas resueltos

Tipo I. Lugares geométricos

1> Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que distan de la recta r: $5x-12y+2=0$ doble que del eje OX.

R: El eje OX tiene por ecuación $y=0$.
Si $P(x, y)$ es uno de los puntos buscados verificará la propiedad $d(P, r)=2d(P, OX) \Leftrightarrow \left|\frac{5x-12y+2}{\sqrt{25+144}}\right|=2\left|\frac{y}{\sqrt{1}}\right|$

$\Leftrightarrow \left|\frac{5x-12y+2}{13}\right|=2\left|\frac{y}{1}\right| \Leftrightarrow \frac{5x-12y+2}{13}=\pm 2y$

Operando se obtienen dos soluciones:
$5x-38y+2=0$ y $5x+14y+2=0$.
Por tanto, el lugar geométrico pedido viene dado por los puntos de esas dos rectas.

2> Determina el lugar geométrico del punto $P(x, y)$ de modo que el producto de las pendientes de las rectas que unen P con $A(3, 2)$ y con $B(5, -2)$ es -8. Identifica dicho lugar e indica sus elementos.

R: El vector $\overrightarrow{AP}$ tiene por coordenadas $\overrightarrow{AP}(x-3, y-2)$.
La recta que pasa por A y P tiene pendiente $m=\frac{y-2}{x-3}$.
Análogamente, dado que es $\overrightarrow{BP}(x-5, y+2)$, la recta que pasa por B y P tiene por pendiente $m'=\frac{y+2}{x-5}$.

Si $m \cdot m'=-8 \Rightarrow \frac{y-2}{x-3}\cdot\frac{y+2}{x-5}=-8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-2)\cdot(y+2)=-8\,(x-3)\cdot(x-5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2-4=-8x^2+64x-120 \Leftrightarrow$

$8x^2+y^2-64x=-116.$

Completando cuadrados en el primer miembro,

$8(x^2-8x+16)+y^2=-116+128 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8(x-4)^2+y^2=12$

$\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{\frac{3}{2}}+\frac{y^2}{12}=1$

Luego el punto P describe una elipse de eje mayor paralelo al eje OY, de centro el punto $(4, 0)$, de semiejes $a=\sqrt{\frac{3}{2}}$ y $b=\sqrt{12}$.

Tipo II. Circunferencias

3> Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(0, 1)$ y $B(1, 0)$ y es tangente a la recta r: $x-2y+4=0$.

R: El centro de la circunferencia está en la mediatriz del segmento AB. Los puntos $P(x, y)$ de dicha mediatriz verifican la condición $d(P, A)=d(P, B)$, que equivale a: $\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$. Elevando al cuadrado y agrupando términos semejantes resulta la recta $x-y=0$.
Al ser de esta recta el centro será de la forma $C(a, a)$.
Además el centro equidista del punto A y de la recta r (por ser ésta tangente a la circunferencia), luego $d(C, A)=d(C, r)$. Relación que equivale a

$\sqrt{(a-0)^2+(a-1)^2}=\left|\frac{a-2a+4}{\sqrt{1+4}}\right|$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+(a-1)^2}=\left|\frac{4-a}{\sqrt{5}}\right|$

Elevando ambos miembros al cuadrado se obtiene $2a^2-2a+1=\frac{16-8a+a^2}{5}$. Operando y agrupando términos semejantes resulta la ecuación $9a^2-2a-11=0$, cuyas soluciones son $a=-1$ y $a=\frac{11}{9}$.

Hay, por tanto, dos circunferencias que satisfacen las condiciones del enunciado:
1ª. Si $a=-1$, el centro es $C(-1, -1)$ y el radio $d(A, C)=\sqrt{5}$. La circunferencia es $(x-1)^2+(y-1)^2=5$.
2ª. Si $a=\frac{11}{9}$, el centro es $C\left(\frac{11}{9}, \frac{11}{9}\right)$ y el radio $d(A, C)=\frac{\sqrt{125}}{9}$. La circunferencia es

$\left(x-\frac{11}{9}\right)^2+\left(y-\frac{11}{9}\right)^2=\frac{125}{81}.$

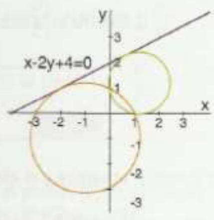


Fig. 11.46.

4> Determina la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene su centro en la bisectriz del 4º cuadrante y su radio mide 2 unidades.

R: a) La bisectriz del 4º cuadrante es la recta $x+y=0$, luego el centro será de la forma $C(a,-a)$. Si $O(0, 0)$ es el origen de coordenadas, como $d(O, C)=r$, será $\sqrt{(a-0)^2+(-a-0)^2}=2 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$. Hay, por tanto, dos circunferencias posibles, cuyos centros son:

$C\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ y $C\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

La que tiene el centro en el cuarto cuadrante es

$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=4$

5> Calcula las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ desde el punto $P(7, 2)$.

R: El centro de la circunferencia es el punto $C(2,-3)$ y su radio $r=\sqrt{2^2+(-3)^2-8}=\sqrt{5}$.
Las rectas que pasan por el punto $P(7, 2)$ son de la forma $t: y-2=m(x-7) \Leftrightarrow t: mx-y-7m+2=0$.
Para que esta recta sea tangente a la circunferencia su distancia al centro ha de ser igual al radio:
$d(C, t)=r$; igualdad que equivale a:

$$\left|\frac{2m+3-7m+2}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|\frac{-5m+5}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\sqrt{5}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado,

$$\frac{25m^2-50m+25}{m^2+1}=5 \Leftrightarrow 2m^2-5m+2=0 \Rightarrow m=\begin{cases}2\\ \frac{1}{2}.\end{cases}$$

Hay, pues dos tangentes:

1ª. Si $m=2$, es la recta $t_1: y-2=2(x-7)$

2ª. Si $m=\frac{1}{2}$, es la recta $t_2: y-2=\frac{1}{2}(x-7)$

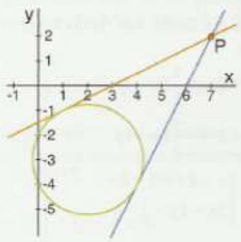


Fig. 11.47.

Tipo III. Elipses e hipérbolas

6> Halla la ecuación de la elipse de excentricidad $e=\frac{2}{3}$ cuyos focos son los puntos $F'(-2, 5)$, $F(6, 5)$.

R: Los focos están situados en la recta $y=5$, que es el eje mayor de la elipse (paralelo, por tanto, al eje OX). El centro es el punto medio del segmento que determinan los focos: el punto $(2, 5)$.

Como $d(F, F')=\sqrt{(6+2)^2+(5-5)^2}=8$, la semidistancia focal es $c=\frac{d(F,F')}{2}=4$.

De la relación $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$, se deduce que $a=6$.

Y de $a^2=b^2+c^2$ resulta $b^2=36-16=20$.

La ecuación de la elipse es: $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y-5)^2}{20}=1$.

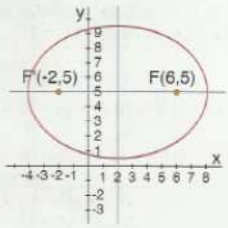


Fig. 11.48.

7> Halla la ecuación de la tangente y de la normal de la elipse $2x^2+y^2=3$ en el punto $A(-1, 1)$.

R: El punto A es de la elipse. Como la recta tangente buscada pasa por $A(-1, 1)$, su ecuación será de la forma $y-1=m(x+1)$.
Para que dicha recta sea tangente a la elipse, el sistema $\begin{cases}2x^2+y^2=3\\ y-1=m(x+1)\end{cases}$ debe tener solución única.

Despejando el valor de y en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, resulta: $2x^2+[m(x+1)+1]^2=3$.
Desarrollando y simplificando se obtiene:
$(2+m^2)x^2+(2m^2+2m)x+(m^2+2m-2)=0$.
Para que esta ecuación de segundo grado tenga solución única, su discriminante ha de ser cero, es decir, $(2m^2+2m)^2-4\cdot(2+m^2)\cdot(m^2+2m-2)=0$; operando resulta la ecuación: $m^2-4m+4=0$, cuya solución es $m=2$.

La recta tangente buscada es, por tanto,

$$y-1=2(x+1) \Leftrightarrow 2x-y+3=0.$$

La recta normal, al ser perpendicular a la tangente, tendrá por pendiente $m'=-\frac{1}{2}$, luego su ecuación es $y-1=-\frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow x+2y-1=0.$

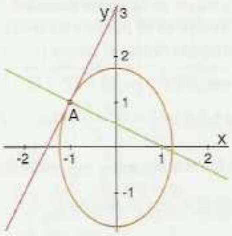


Fig. 11.49.

8> Determina la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, por asíntotas las rectas $y=\pm\frac{3}{5}x$ y que pasa por el punto $P(2,-1)$.

R:

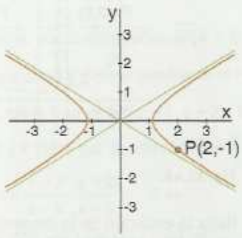


Fig. 11.50.

Las hipérbolas centradas en el origen tienen por ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y sus asíntotas son las rectas $y=\pm\frac{b}{a}x$.

En este caso, como las asíntotas son las rectas $y=\pm\frac{3}{5}x$, se deduce que $\frac{b}{a}=\frac{3}{5}$; por tanto, $b=\frac{3}{5}a$.

Llevando este valor a la ecuación de la hipérbola resulta $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\frac{9}{25}a^2}=1$ e imponiendo que pase por el punto $P(2,-1)$ es $\frac{2^2}{a^2}-\frac{(-1)^2}{\frac{9}{25}a^2}=1 \Leftrightarrow a^2=\frac{11}{9}$; por tanto, $b^2=\frac{11}{25}$.

Por tanto, la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{\frac{11}{9}}-\frac{y^2}{\frac{11}{25}}=1$

Tipo IV. Parábolas

9> Calcula la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta δ: $y+2=0$ y que tiene por vértice el punto $V(1, 2)$.

R: El eje de la parábola es la perpendicular a la directriz que pasa por el vértice, luego es la recta $x=1$. Al tener eje vertical la ecuación de la parábola será de la forma $(x-1)^2=2p\ (y-2)$.

Como $\frac{p}{2}=d(V,\delta)=4$

$\Rightarrow p=8.$

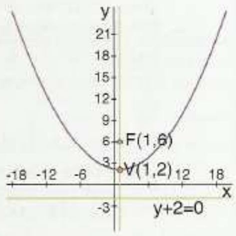


Fig. 11.51.

Luego su ecuación es: $(x-1)^2=16(y-2)$.

Su foco, que está en el eje, y a distancia 4 del vértice, es el punto $F(1, 6)$. Su gráfica es la adjunta.

10> Halla la ecuación de la tangente a la parábola $y^2=3x$ trazada desde el punto $P(1,-2)$.

R: El punto no es de la parábola. Como la recta tangente buscada pasa por $P(1,-2)$ su ecuación será de la forma $y+2=m(x-1)$. Para que dicha recta sea tangente a la parábola, el sistema $\begin{cases} y^2=3x \\ y+2=m(x-1) \end{cases}$ debe tener solución única. Despejando el valor de y en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, resulta $[m(x-1)-2]^2=3x$; desarrollando y simplificando se obtiene:

$m^2x^2+(-2m^2-4m-3)x+(m^2+4m+4)=0$. Para que esta ecuación de segundo grado tenga solución única, su discriminante ha de ser cero, es decir:

$$(-2m^2-4m-3)^2-4\cdot m^2\cdot(m^2+4m+4)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m^2+8m+3=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2} \text{ y } m=-\frac{3}{2}.$$

Hay, por tanto, dos rectas tangentes.

Son:

$$\begin{cases} y+2=-\frac{1}{2}(x-1) \\ y+2=-\frac{3}{2}(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3=0 \\ 3x+2y+1=0 \end{cases}$$

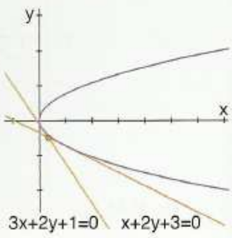


Fig. 11.52.

Problemas propuestos

Tipo I: Lugares geométricos

1> Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $A(2, -3)$ y de la recta r: $x - 2y - 1 = 0$.

R: $4x^2 + y^2 + 4xy - 18x + 26y + 64 = 0$.

2> Determina la mediatriz del segmento de extremos $A(-2, 3)$ y $B(4, 1)$.

R: $3x - y - 1 = 0$.

3> Calcula las bisectrices de las rectas r: $2x + y - 3 = 0$ y s: $2x - 4y + 5 = 0$.

R: $2x + 6y - 11 = 0$; $6x - 2y - 1 = 0$.

4> Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a la recta r:$3x - 4y + 2 = 0$ sea igual al cuadrado de su distancia al punto $A(3, -2)$.

R: $5x^2 + 5y^2 - 33x + 24y + 63 = 0$;
$5x^2 + 5y^2 - 27x + 16y + 67 = 0$

5> PAU Determina la ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcula el área que encierra.

R: $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$; $A = 4\pi\ u^2$.

6> Determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a las rectas r:$4x + 3y - 2 = 0$, s:$12x - 5y = 0$ sea $26/5$.

R: $20x - 13y + 2 = 0$; $28x - 7y - 2 = 0$.

7> Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano que disten de la recta r:$5x + 12y - 3 = 0$ triple que del eje OY.

R: $34x - 12y + 3 = 0$; $44x + 12y - 3 = 0$.

8> Halla el lugar geométrico que determinan los centros de las circunferencias tangentes simultáneamente al eje OX y a la recta r:$3x + 4y - 12 = 0$.

R: $3x - y - 12 = 0$; $x + 3y - 4 = 0$.

Tipo II. Circunferencias

9> Escribe la ecuación de las siguientes circunferencias:
a) de centro $C(1, -5)$ y radio 5,
b) de centro $C(2, -2)$ y que pasa por $P(3, 1)$,
a) de centro $C(2, -1)$ y tangente al eje OX,
b) de centro $C(-2, -1)$ y tangente a la recta s: $x + 5y - 2 = 0$,
c) de diámetro el segmento de extremos $A(-4, 1)$ y $B(2, 3)$.

R: a) $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 25$; b) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 10$;
c) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$; d) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = \frac{81}{26}$;
e) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$.

10> PAU a) Los puntos $A = (3, 0)$ y $B = (0, 4)$ son puntos diametralmente opuestos de una circunferencia. Halla la ecuación de esta.
b) Los puntos $(6, 0)$ y $(0, 8)$ son diametralmente opuestos en una circunferencia. Calcula la ecuación de la misma y especifica sus valores característicos.

R: a) $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$; b) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

11> Determina el radio y el centro de las siguientes circunferencias:
a) $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0$,
b) $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$,
c) $2x^2 + 2y^2 + 4x + y - 3 = 0$.

R: a) $C(5, -2)$, $r = \sqrt{29}$; b) $C\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $r = \frac{\sqrt{17}}{2}$;
c) $C\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$, $r = \frac{\sqrt{41}}{4}$

12> PAU Dados los puntos $A(-5, -1)$, $B(2, 4)$, $C(0, 2)$, sea M el punto medio del segmento BC. Calcula la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento AM.

R: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$.

13> Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 1 = 0$, determina la ecuación de otra concéntrica con ella
a) de radio $\sqrt{2}$,
b) que pase por el punto $P(-3, 1)$.

R: a) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 18 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 38 = 0$.

14> Sean $Q = (-1, 0)$ y $R = (3, 0)$.

PAU a) Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano para los que el producto escalar de los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$ es 5.

b) Identifica la cónica resultante y sus elementos característicos.

R: a) $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$; b) Circunferencia de centro $C(1, 0)$ y radio $r = 3$.

15> Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-2, 1)$, $B(-2, 2)$ y $C(2, -2)$.

R: $x^2 + y^2 - 3x - 3y - 8 = 0$.

16> Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-2, 3)$, $B(1, 2)$ y tiene su centro en la recta $x - 2y - 2 = 0$.

R: $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

17> a) Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A = (1, 6)$ y $B = (5, 2)$, y tiene su centro en la recta $y = 2x$.

PAU b) Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(-2, 3)$ y que tiene su centro en la recta $x + y + 4 = 0$. Especifica los elementos característicos de la misma.

R: a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;
b) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

18> La circunferencia C pasa por el punto $A = (4, 0)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $B = (4, 4)$.

PAU a) Determina la ecuación de la recta que pasa por B y por el centro de la circunferencia C.

b) Encuentra el centro de C y calcula su radio.

R: a) $x + y - 8 = 0$; b) $(6, 2)$; $r = \sqrt{8}$.

19> a) Determina la ecuación que define el lugar geométrico de los puntos del plano que son centro de las circunferencias que pasan por los puntos $P = (2, 0)$ y $Q = (0, 1)$.

PAU b) Una circunferencia de longitud 2π que contiene al origen de coordenadas, está centrada en uno de los puntos del lugar geométrico definido en a). Calcula las coordenadas del centro de la circunferencia.

R: a) $4x - 2y - 3 = 0$; b) dos soluciones:
$C_1\left(\frac{6+\sqrt{11}}{10}, \frac{-3+2\sqrt{11}}{10}\right)$ y $C_2\left(\frac{6-\sqrt{11}}{10}, \frac{-3-2\sqrt{11}}{10}\right)$

20> a) Halla la mediatriz del segmento determinado por la recta $x - y - 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0$.

b) Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y por los puntos de intersección de la recta y circunferencia anteriores.

R: a) $x + y + 3 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$.

21> Idea dos métodos diferentes que permitan decidir si la recta $4x + 3y - 8 = 0$ es exterior, tangente o secante a la circunferencia $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Razona la respuesta.

PAU

R: Es tangente

22> Calcula la ecuación de la tangente y normal a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ en el punto $P(3, -1)$.

R: Tangente, $x + 2y - 1 = 0$; normal, $2x - y - 7 = 0$.

23> Sea s la recta $3x + 4y - 1 = 0$. Determina las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$

a) paralelas a la recta s,

b) perpendiculares a la recta s.

R: a) Dos soluciones: $3x + 4y + 27 = 0$;
$3x + 4y - 23 = 0$;
b) Dos soluciones: $4x - 3y + 11 = 0$;
$4x - 3y - 39 = 0$.

24> Halla la ecuación de la circunferencia C que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$ y es tangente a la recta r: $y = 3x + 2$. En el haz de rectas paralelas a r hay otra tangente a C, halla su ecuación:

PAU

R: $(x - 6)^2 + y^2 = 40$; $3x - y - 38 = 0$.

25> Sean los puntos $A(3, 2)$ y $B(5, 3)$. Calcula:

PAU a) Ecuación general de la circunferencia que pasa por el punto B y tiene su centro en A.

b) Ecuación de la tangente a esa circunferencia en B.

c) Área del triángulo formado por la tangente anterior y los ejes cartesianos.

R: a) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$;
b) $2x + y - 13 = 0$;
c) $A = \frac{169}{4} u^2$.

26> Calcula la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2+y^2+2x+4y-5=0$ desde el punto $P(4, 3)$.

R: Dos soluciones: $3x-y-9=0$; $x-3y+5=0$.

27> Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(5, 8)$ y es tangente a las rectas $r{:}\,2x-y+3=0$, $s{:}\,x-2y+3=0$.

R: Dos soluciones: $(x-4)^2+(y-6)^2=5$; $\left(x-\frac{76}{9}\right)^2+\left(y-\frac{94}{9}\right)^2=\frac{1445}{81}$.

28> Halla la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de vértices $A(1, 6)$, $B(-4, -4)$ y $C(4, 0)$.

R: $(x-1)^2+(y-1)^2=5$.

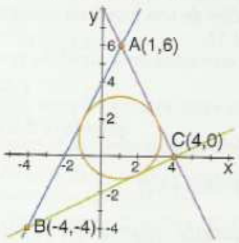


Fig. 11.53.

Tipo III. Elipses e hipérbolas

29> Halla la ecuación reducida de las siguientes elipses:
a) distancia focal 4 y semieje menor 3,
b) semidistancia focal 3 y eje mayor 10,
c) pasa por el punto (8, 3) y su excentricidad es $\frac{\sqrt{3}}{2}$,
d) pasa por $(-4, 1)$ y eje menor 6,
e) pasa por (3, 1) y (0, 2).

R: a) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; c) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$; d) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$; e) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

30> PAU Calcula la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $F(-1, 2)$ y $F'(3, 2)$, y su excentricidad es igual a 1/3.

R: $\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{32}=1$

31> Determina los elementos de las siguientes elipses:
a) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=1$; b) $2x^2+25y^2=50$
c) $\frac{(x-3)^2}{169}+\frac{(y+2)^2}{121}=1$; d) $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

R: a) Centrada en el origen; eje mayor el eje OX; $a=12$, $b=6$, $c=\sqrt{108}$; b) Centrada en el origen; eje mayor el eje OX; $a=5$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{23}$; c) Centrada en $(3, -2)$; eje mayor paralelo al eje OX; $a=13$, $b=11$, $c=\sqrt{48}$; d) Centrada en (0, 2); eje mayor paralelo al eje OY; $a=2$, $b=5$, $c=\sqrt{21}$.

32> Determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos $(3, -2)$ y $(3, 4)$ es 8. Identifica dicho lugar geométrico y determina sus elementos.

R: Elipse de ecuación $\frac{(x-3)^2}{7}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$.

33> Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(3, 0)$ es la mitad de su distancia a la recta $r{:}\ x-9=0$. Identifica dicho lugar y determina sus elementos.

R: $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. Elipse centrada en (1, 0), eje mayor paralelo al eje OX; $a=4$, $b=\sqrt{12}$, $c=2$.

34> Calcula la ecuación de la tangente y de la normal a la elipse $3x^2+4y^2=16$ en el punto $P(2, -1)$.

R: Tangente, $3x-2y-8=0$; normal, $2x+3y-1=0$.

35> Determina la posición relativa de la elipse $6x^2+y^2=100$ y la recta $12x-y+50=0$.

R: La recta es tangente a la elipse en $P(-4, 2)$.

36> Halla la ecuación de las tangentes a la elipse $3x^2+4y^2=16$ paralelas a la recta $3x-2y+1=0$.

R: $3x-2y+8=0$; $3x-2y-8=0$.

37> Calcula la tangente a la elipse $x^2+6y^2=100$ desde el punto $P(10, 5)$.

R: $x-12y+50=0$.

38> PAU Un segmento de longitud 3, apoya sus extremos sobre los ejes de coordenadas (uno sobre cada eje) tomando todas las posiciones posibles.

a) Determina la ecuación del lugar geométrico del punto del segmento que está situado a distancia 1 del extremo que se apoya en el eje OY.

b) Identifica la cónica resultante.

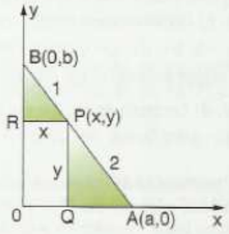


Fig.9.54.

R: a) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$; b) Elipse centrada en el origen, eje mayor el eje de ordenadas, semieje mayor 2, semieje menor 1.

39> Halla la ecuación reducida de las siguientes hipérbolas:

a) distancia focal 10 y eje imaginario 6,

b) semidistancia focal 3 y eje real 4,

c) pasa por el punto $(-3, 2)$ y su excentricidad es $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

d) pasa por $(3, -5)$ y semieje real 2,

e) pasa por $(6, -1)$ y $(3, 0)$,

f) pasa por el punto $(25, 12)$ y una de sus asíntotas es la recta $y=\dfrac{3}{5}x$.

R: a) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; b) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$; c) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$;

d) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{20}=1$; e) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{1/3}=1$; f) $\dfrac{x^2}{225}-\dfrac{y^2}{81}=1$

40> PAU Da la definición de hipérbola. Encuentra la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos $F(-3, 0)$ y $F'(3, 0)$ y que pasa por el punto $P(8, 5\sqrt{3})$.

R: $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

41> Determina los elementos y las asíntotas de las siguientes hipérbolas:

a) $\dfrac{x^2}{169}-\dfrac{y^2}{25}=1$; b) $x^2-18y^2=36$

c) $\dfrac{(x+2)^2}{169}-\dfrac{(y-1)^2}{120}=1$; d) $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{(x-3)^2}{4}=1$

R: a) $a=13$, $b=5$, $c=\sqrt{194}$, asíntotas $y=\pm\dfrac{5}{13}x$;

b) $a=6$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{38}$, asíntotas $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}x$;

c) Centrada en $(-2, 1)$; $a=13$, $b=\sqrt{120}$, $c=17$, asíntotas $y=\pm\dfrac{\sqrt{120}}{13}x$;

d) Centrada en $(3,0)$; eje real paralelo al eje OY; $a=5$, $b=2$, $c=\sqrt{29}$ asíntotas $y=\pm\dfrac{2}{5}x$.

42> a) Halla el valor de k para que la hipérbola $4x^2-ky^2=9$ sea equilátera. Determina sus elementos.

b) Halla la ecuación de una hipérbola equilátera de distancia focal 12.

c) Determina los elementos de la hipérbola $xy=32$.

R: a) $k=4$. Para este valor, es $a=b=\dfrac{3}{2}$ y $c=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$;

b) $\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{y^2}{18}=1$. Referida a sus asíntotas, su ecuación es $xy=9$; c) $a=b=8$; $c=8\sqrt{2}$.

43> Determina la posición relativa de la hipérbola $2x^2-3y^2=6$ y la recta $x+y=5$.

R: Se cortan en los puntos $P(3, 2)$ y $Q(27, -22)$.

44> Calcula la ecuación de la tangente y de la normal a la hipérbola $2x^2-y^2=2$ en el punto $P(3, 4)$.

R: Tangente, $3x-2y-1=0$; normal, $2x+3y-18=0$.

45> Identifica las siguientes cónicas y determina sus elementos:

a) $2x^2+3y^2-12x+6y+3=0$,

b) $5x^2+y^2+10x-4y+4=0$,

c) $x^2-3y^2-6y-9=0$,

d) $5y^2-16x^2-64x-10y-139=0$.

R: a) elipse centrada en $(3, -1)$, $a=3$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{3}$;

b) elipse centrada en $(-1, 2)$, de eje mayor paralelo al eje OY; $a=\sqrt{5}$, $b=1$, $c=2$;

c) hipérbola centrada en $(0, -1)$; $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{8}$ eje real paralelo al eje OX;

d) hipérbola centrada en $(-2, 1)$ de eje real paralelo al eje OY; $a=4$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{21}$.

46> Sea H la hipérbola $xy = 4$. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias, ambas con centro en el origen de coordenadas y tales que:
a) C_1 es tangente a la hipérbola.
b) C_2 corta a la hipérbola H en un punto de abscisa 1.
Representa gráficamente las tres cónicas anteriores y calcula el área de la corona circular encerrada entre las dos circunferencias.

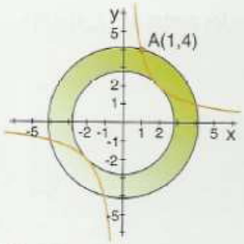


Fig. 11.55.

R: $A = 9\pi u^2$

Tipo IV. Parábolas

47> En cada caso, halla la ecuación y los restantes elementos de las parábolas:
a) directriz $x = 0$, vértice $(2, 3)$,
b) foco $F(5, 2)$, vértice $V(5, -3)$,
c) directriz $y = 2$, foco $F(0, 1)$,
d) eje $y = 3$, foco $F(-1, 3)$, parámetro 6 y ramas hacia la derecha.

R: a) $F(4, 3)$; eje, $y = 3$; $p = 4$; $(y-3)^2 = 8(x-2)$;
b) directriz, $y = -8$; eje, $x = 5$; $p = 10$; $(x-5)^2 = 20(y+3)$;
c) eje, $x = 0$; $V\left(0, \frac{3}{2}\right)$; $p = 1$; $x^2 = -2\left(y - \frac{3}{2}\right)$;
d) directriz, $x = -7$; $V(-4, 3)$; $(y-3)^2 = 12(x+4)$

48> Encuentra la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $y = x$ y cuyo foco es el punto $(2, 0)$.

R: $x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 8 = 0$.

49> Determina el foco, la directriz, el eje, el vértice y el parámetro de las siguientes parábolas:
a) $y^2 = 8x$; b) $y^2 = -4x$; c) $x^2 = 4y$; d) $x^2 = -8y$;
e) $(y-3)^2 = 8(x+1)$; f) $(x-5)^2 = 24y$

R: a) $F(2, 0)$; $x = -2$; $y = 0$; $V(0, 0)$; $p = 4$;
b) $F(-1, 0)$; $x = 1$; $y = 0$; $V(0, 0)$; $p = 2$;
c) $F(0, 1)$, $y = -1$, $x = 0$, $V(0, 0)$, $p = 2$;
d) $F(0, -2)$, $y = 2$, $x = 0$, $V(0, 0)$, $p = 4$;
e) $F(1, 3)$, $x = -3$, $y = 3$, $V(-1, 3)$, $p = 4$;
f) $F(5, 6)$, $y = -6$, $x = 5$, $V(5, 0)$, $p = 12$.

50> La parábola de ecuación $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ tiene por foco el punto $(0, 2)$. Encuentre su directriz.

R: $\delta : x = -3$.

51> Calcula la ecuación de una parábola
a) de eje paralelo al eje OY, vértice en el eje OX, que pase por $(4, 2)$ y $(-2, 8)$,
b) de eje paralelo al eje OX, que pasa por los puntos $(2, 0)$, $(5, 6)$ y $(5, -2)$.

R: a) $(x-10)^2 = 18y$ o $(x-2)^2 = 2y$; b) $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 2$.

52> Halla la ecuación de la tangente y de la normal a la parábola $(x-1)^2 = 2(y-2)$ en el punto $P(3, 4)$.

R: Tangente, $2x - y - 2 = 0$; normal, $x + 2y - 11 = 0$.

53> Calcula las ecuaciones de las dos rectas del plano que pasan por el punto $P = (1, -1)$ y que son tangentes a la parábola $y = (x-1)^2$.

R: $2x - y - 3 = 0$; $2x + y - 1 = 0$.

54> Calcula la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos de corte de la recta $2x + y - 2 = 0$ con la parábola $(x-2)^2 = 2(y+2)$.

R: $4\sqrt{5}$

55> Determina el foco, la directriz, el eje y el vértice de las parábolas:
a) $x^2 - 4x - 2y - 2 = 0$, b) $y^2 - 8x + 16 = 0$,
c) $y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$.

R: a) vértice $V(2, -3)$; eje $x = 2$; foco $F\left(2, -\frac{5}{2}\right)$; directriz $\delta : y = -\frac{7}{2}$;
b) vértice $V(2, 0)$; eje $y = 0$; foco $F(4, 0)$; directriz $\delta : x = 0$;
c) vértice $V(1, 2)$; eje $y = 2$; foco $F\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$; directriz $\delta : x = \frac{5}{2}$

10 cuestiones básicas

Las 10 cuestiones que siguen debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos, te recomendamos que estudies un poco más. (Puedes tener a mano las ecuaciones de las cónicas.)

1> Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los ejes de coordenadas.

2> Escribe la ecuación de dos circunferencias concéntricas, con centro en $C(2, -1)$ y radios 1 y 2.

3> Dibuja la circunferencia $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ y da la ecuación de la recta tangente a ella en el punto $P(1, -2)$.

4> Halla la ecuación de la circunferencia que tiene un diámetro determinado por los puntos $A(-2, 4)$ y $B(4, -4)$

5> Haz un esbozo de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

6> Halla los focos y la excentricidad de la elipse dada por la ecuación anterior.

7> Haz un esbozo de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

8> Las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ son las rectas:

a) $y = \pm\frac{3}{4}x$; b) $y = \pm\frac{4}{3}x$; c) $y = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}\,x$;

9> El parámetro de la parábola $(x-1)^2 = 5y$ es:

a) $p = 5$; b) $p = 10$; c) $p = \frac{5}{2}$

10> La directriz de la parábola $y^2 = -8x$ es la recta: *a)* $y = 2$; b) $x = 2$; c) $x = -2$

R: **1.** $x - y = 0$; $x + y = 0$; **2.** $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$; $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$; **3.** $y + 2 = 0$; **4.** $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$; **6.** $F\left(\sqrt{7}, 0\right)$, $F'(-\sqrt{7}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$; **8.** c); **9.** c); **10.** b)

2 cuestiones para investigar

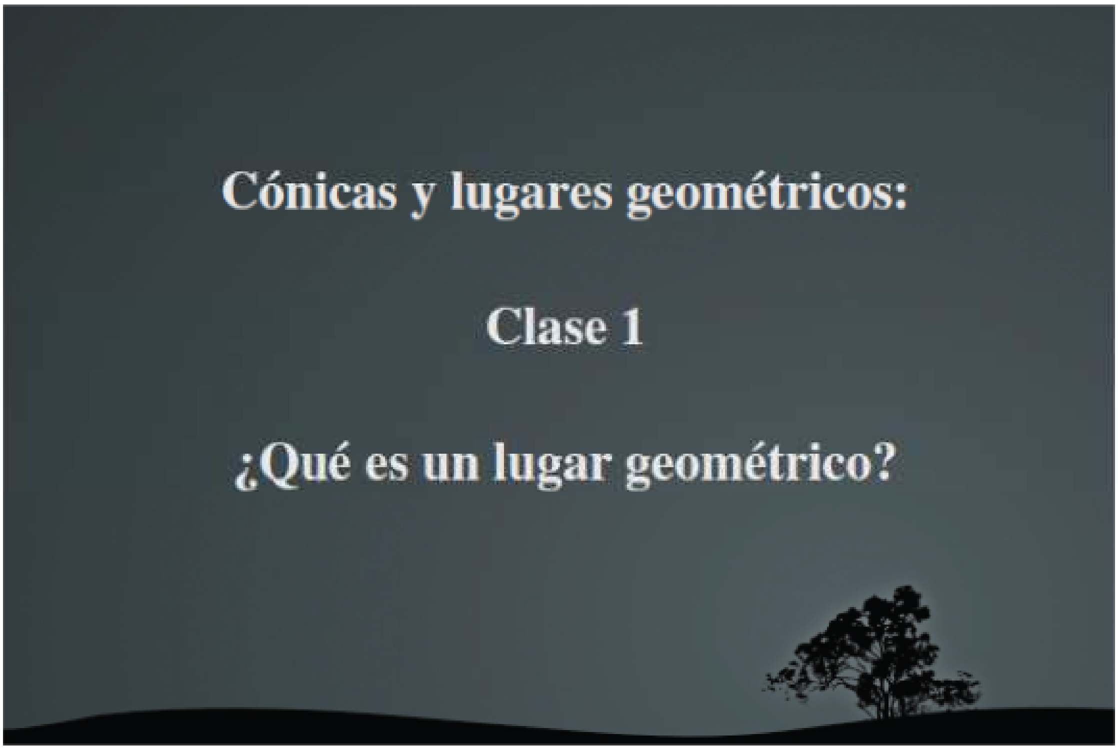
1> Se llaman **circunferencias focales** de la elipse a las que tienen por centro uno de sus focos y como radio el eje mayor.

a) Determina las ecuaciones de las circunferencias focales asociadas a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

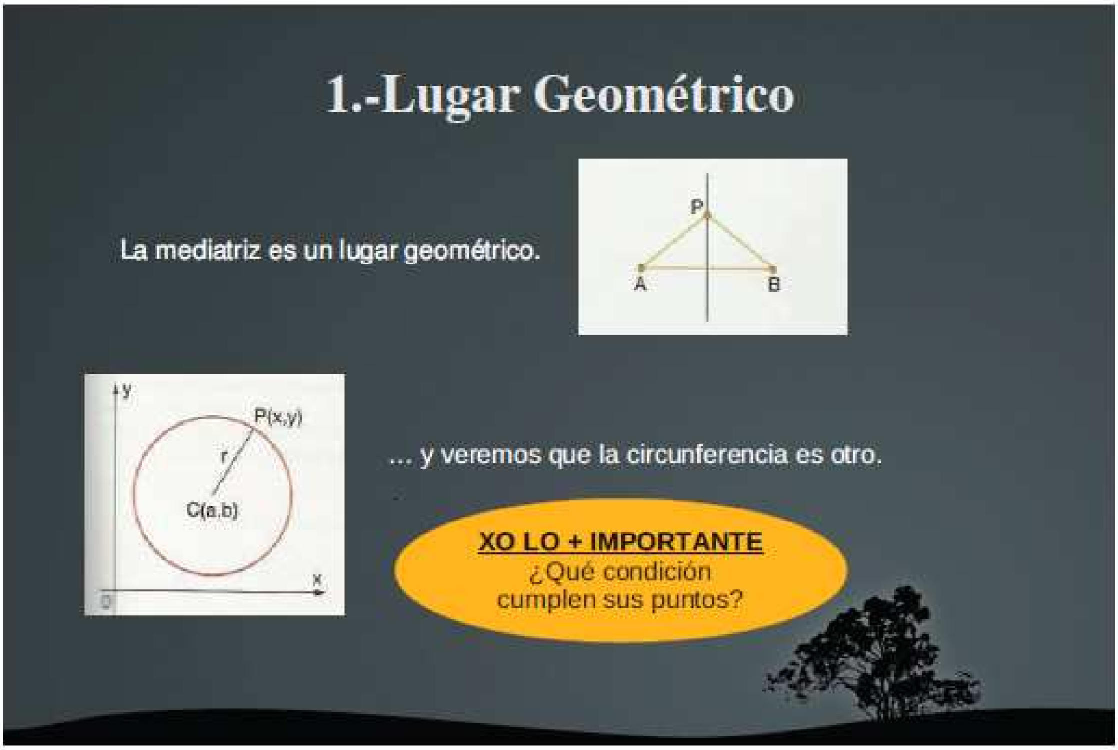
b) ¿Qué cónica es *el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una circunferencia y de un punto fijo interior a la circunferencia*?

2> El estudio de las cónicas se ha hecho, a lo largo de la historia, de distintas formas. Su estudio como secciones cónicas (la forma cómo se estudiaron originalmente) puedes encontrarlo en http://www.xtec.es/~jdomen28/article6.htm#top
En http://personal.redestb.es/jlabreu/descartes/conicas_avanzadas.htm tienes otro enfoque, también como lugar geométrico, pero distinto al estudiado en la Unidad.
También puedes investigar en: http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Geometria_afin_analitica_plano_lugares_geometricos/Geometria_8.htm#9.4
En la página http://www.fpolar.org.ve/matematica3 puedes encontrar distintas aplicaciones de las cónicas.

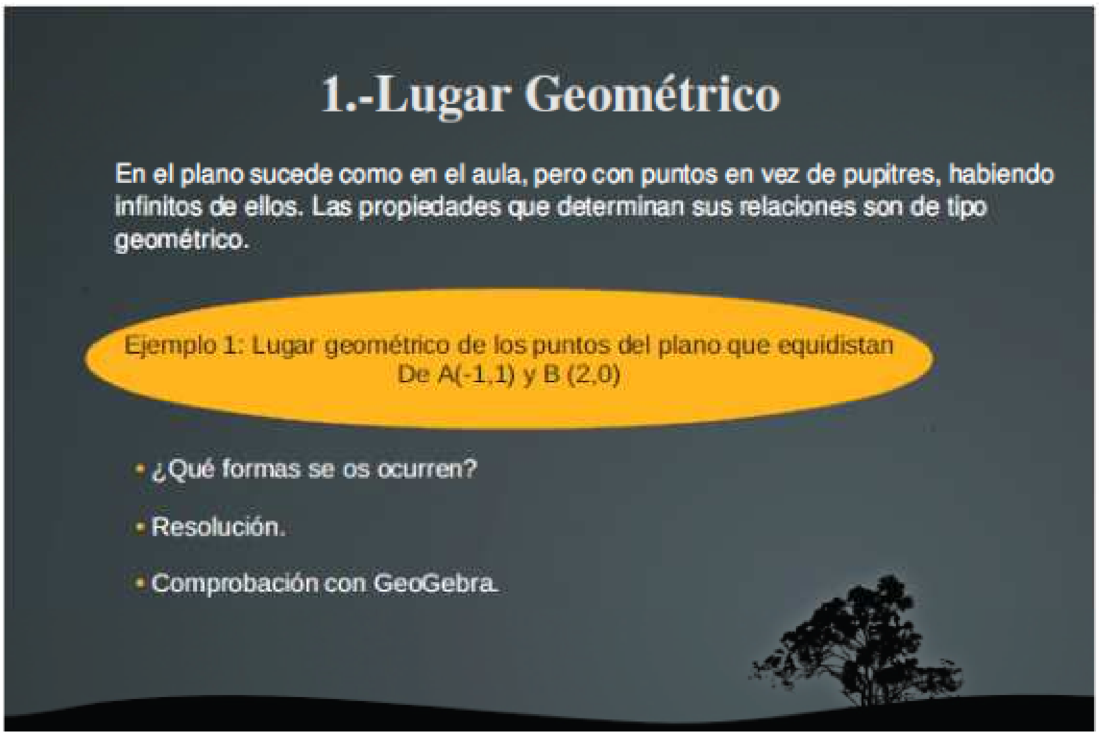
B. Transparencias utilizadas durante las clases

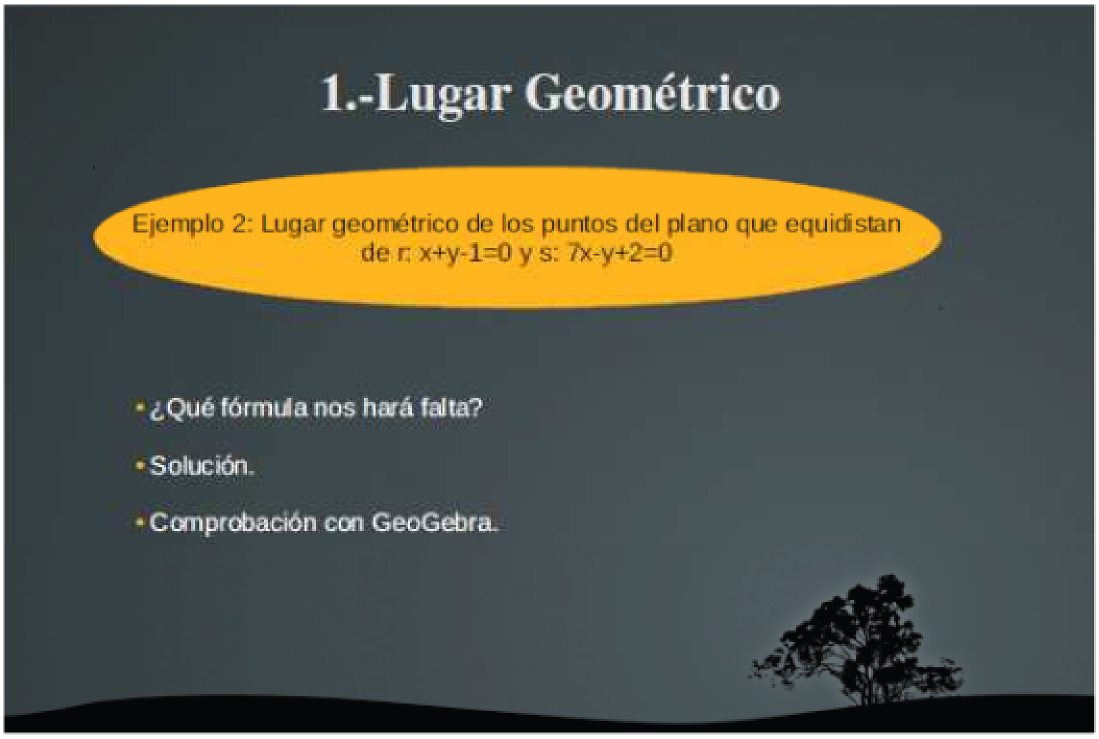

Cónicas y lugares geométricos:
Clase 1
¿Qué es un lugar geométrico?

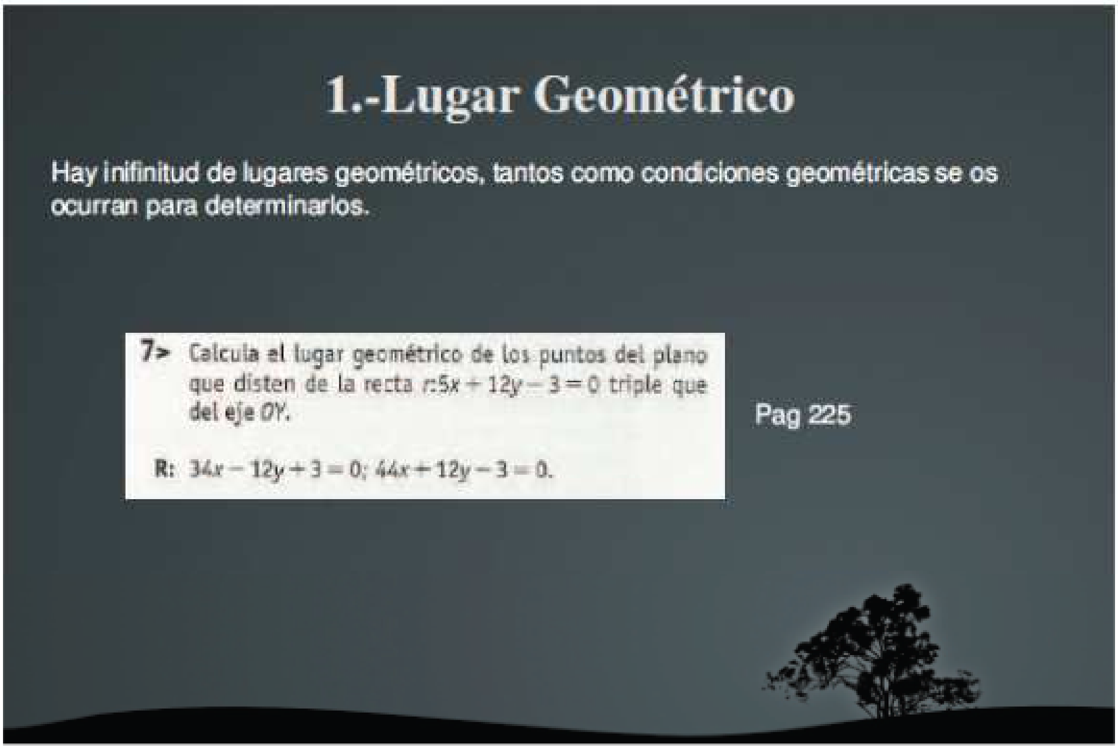

1.-Lugar Geométrico
Se llama LUGAR GEOMÉTRICO a un conjunto de puntos que cumplen una determinada condición.
¿Sabéis alguno? ¿Qué condición cumplen sus puntos?

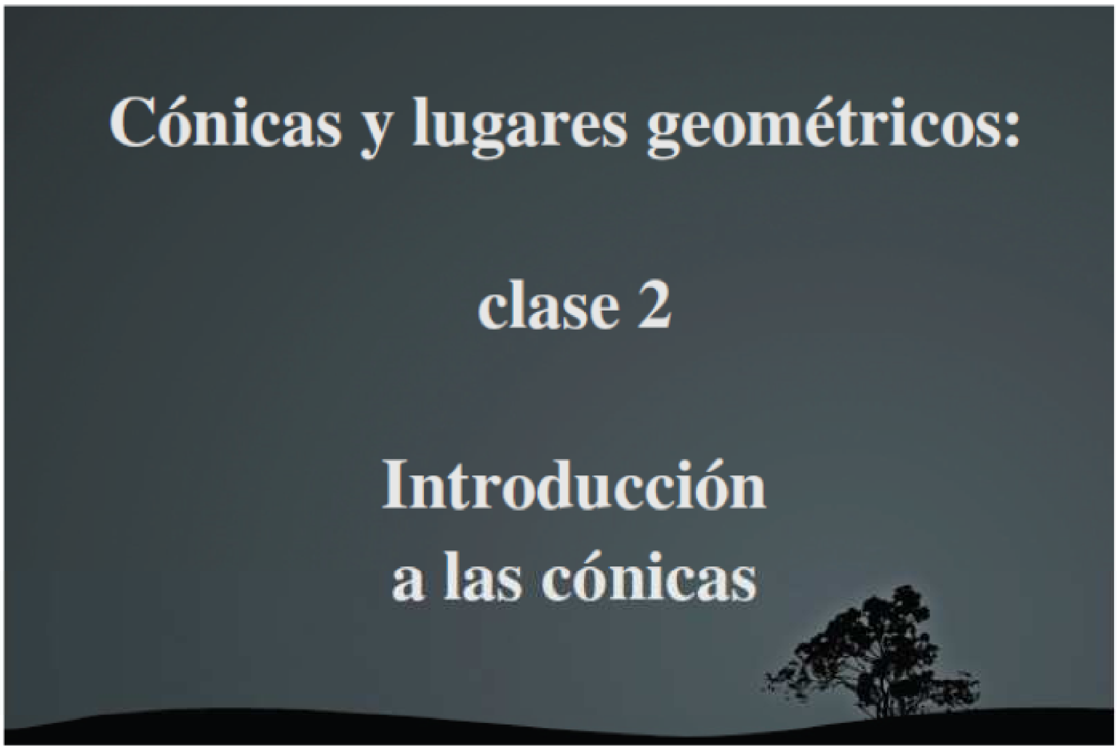

1.-Lugar Geométrico
La mediatriz es un lugar geométrico.
P
A
B
y
P(x,y)
r
C(a,b)
x
... y veremos que la circunferencia es otro.
XO LO + IMPORTANTE
¿Qué condición
cumplen sus puntos?

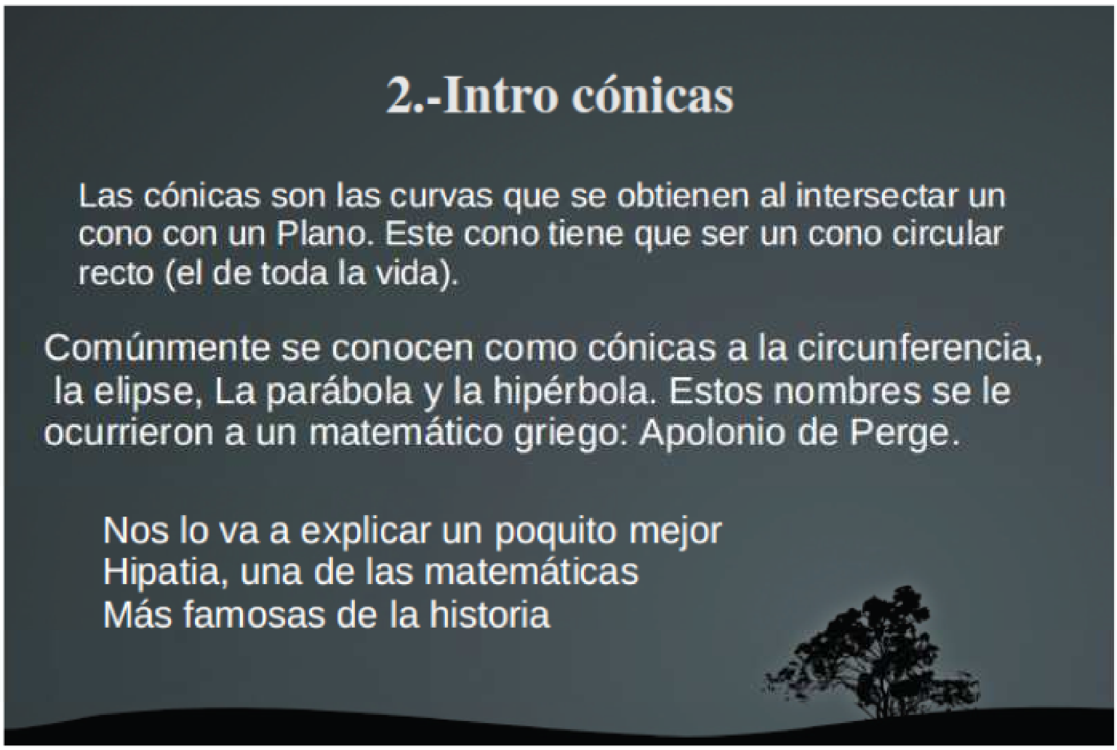

1.-Lugar Geométrico
Se llama LUGAR AULARIANO a un conjunto de pupitres que cumplen una determinada condición.
• ¿Lugar aulariano de los que (en teoría) mejor tienen que ver la pizarra?
• Dados dos pupitres: ¿Lugar aulariano de los que equidistan entre ambos?
• Dado un pupitre: ¿Cuál sería su 'cháchara-ferencia'?
¿Se os ocurre algún
otro?

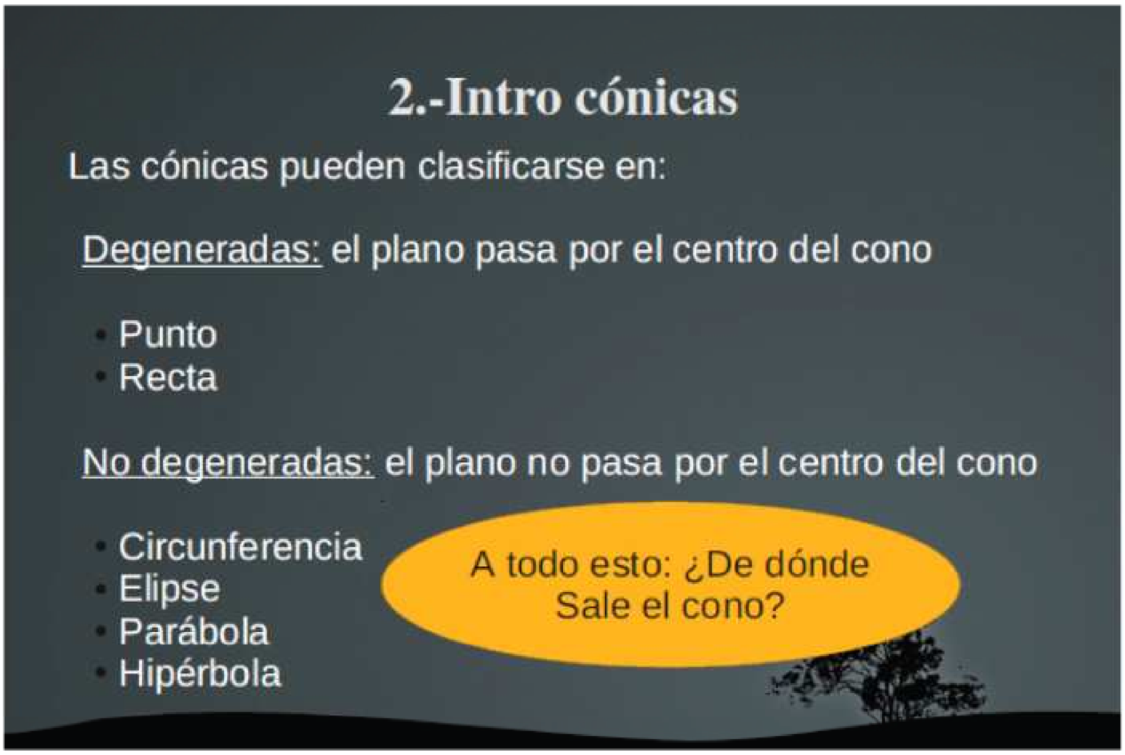

1.-Lugar Geométrico
En el plano sucede como en el aula, pero con puntos en vez de pupitres, habiendo infinitos de ellos. Las propiedades que determinan sus relaciones son de tipo geométrico.
Ejemplo 1: Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan De A(-1,1) y B (2,0)
• ¿Qué formas se os ocurren?
• Resolución.
• Comprobación con GeoGebra.


1.-Lugar Geométrico
Ejemplo 2: Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de r: x+y-1=0 y s: 7x-y+2=0
• ¿Qué fórmula nos hará falta?
• Solución.
• Comprobación con GeoGebra.

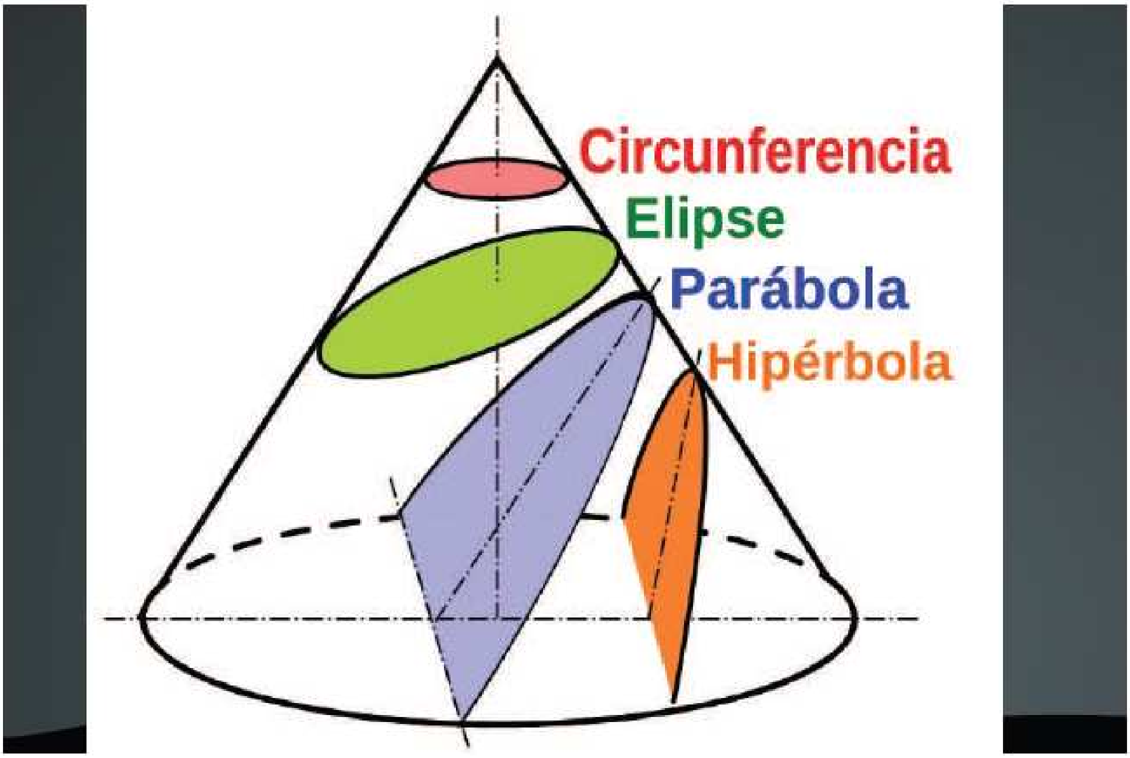

1.-Lugar Geométrico
Hay inifinitud de lugares geométricos, tantos como condiciones geométricas se os ocurran para determinarlos.
7> Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano que disten de la recta r: 5x + 12y − 3 = 0 triple que del eje OY.
R: 34x − 12y + 3 = 0; 44x + 12y − 3 = 0.
Pag 225

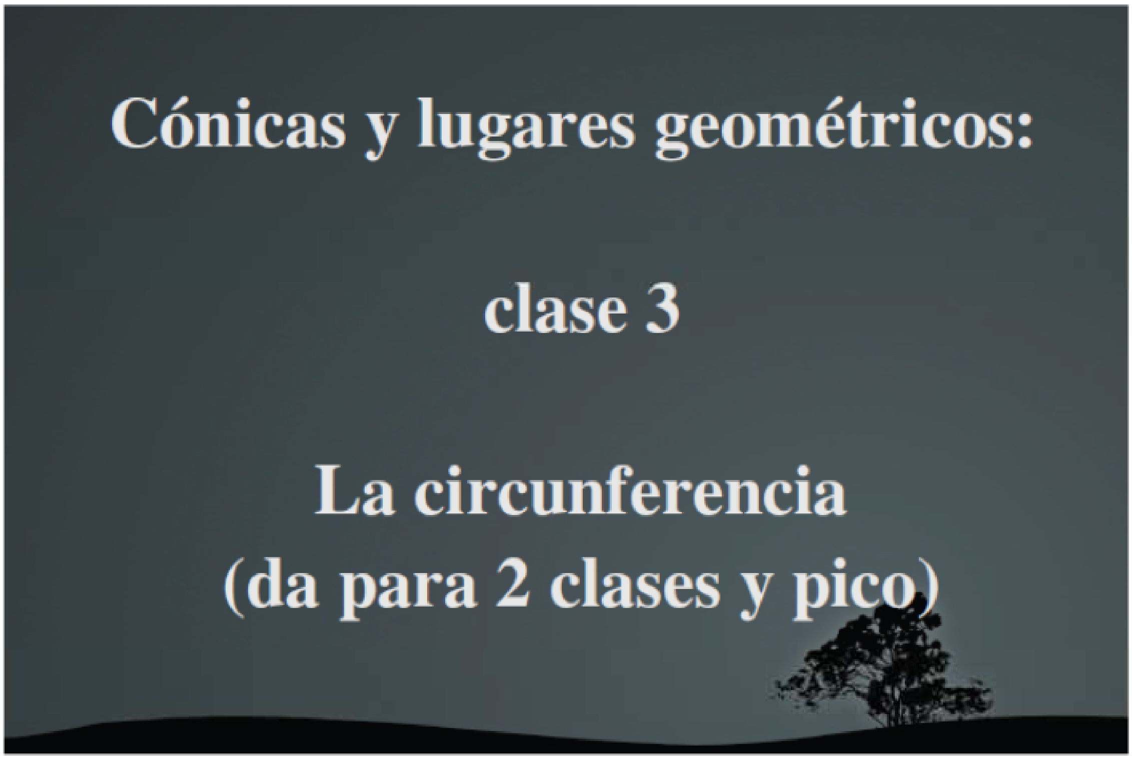

Cónicas y lugares geométricos:
clase 2
Introducción
a las cónicas

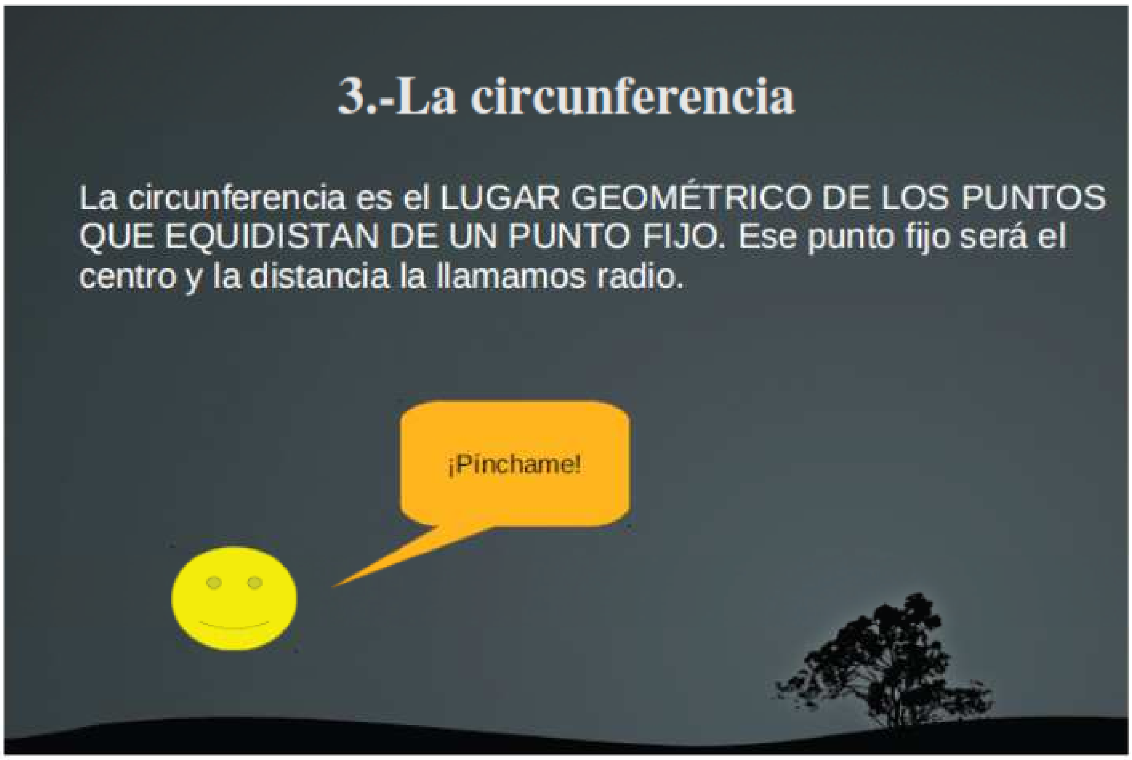

2.-Intro cónicas
Las cónicas son las curvas que se obtienen al intersectar un cono con un Plano. Este cono tiene que ser un cono circular recto (el de toda la vida).
Comúnmente se conocen como cónicas a la circunferencia, la elipse, La parábola y la hipérbola. Estos nombres se le ocurrieron a un matemático griego: Apolonio de Perge.
Nos lo va a explicar un poquito mejor
Hipatia, una de las matemáticas
Más famosas de la historia

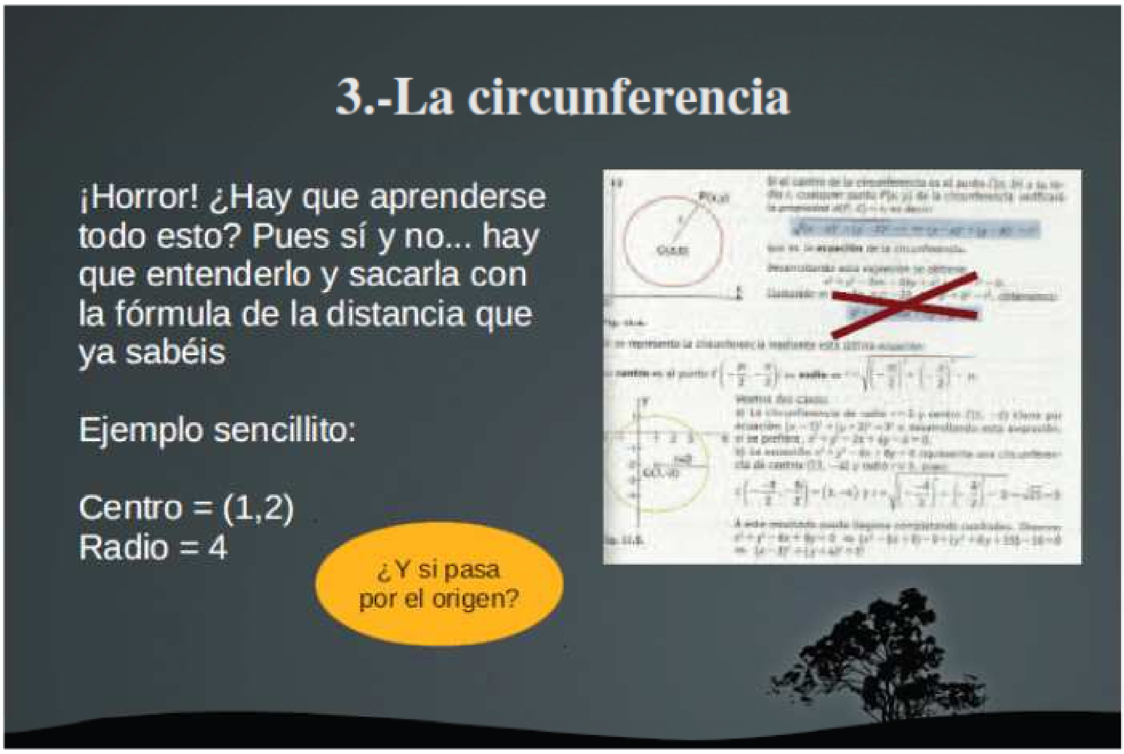

2.-Intro cónicas
Las cónicas pueden clasificarse en:
Degeneradas: el plano pasa por el centro del cono
• Punto
• Recta
No degeneradas: el plano no pasa por el centro del cono
• Circunferencia
• Elipse
• Parábola
• Hipérbola
A todo esto: ¿De dónde Sale el cono?

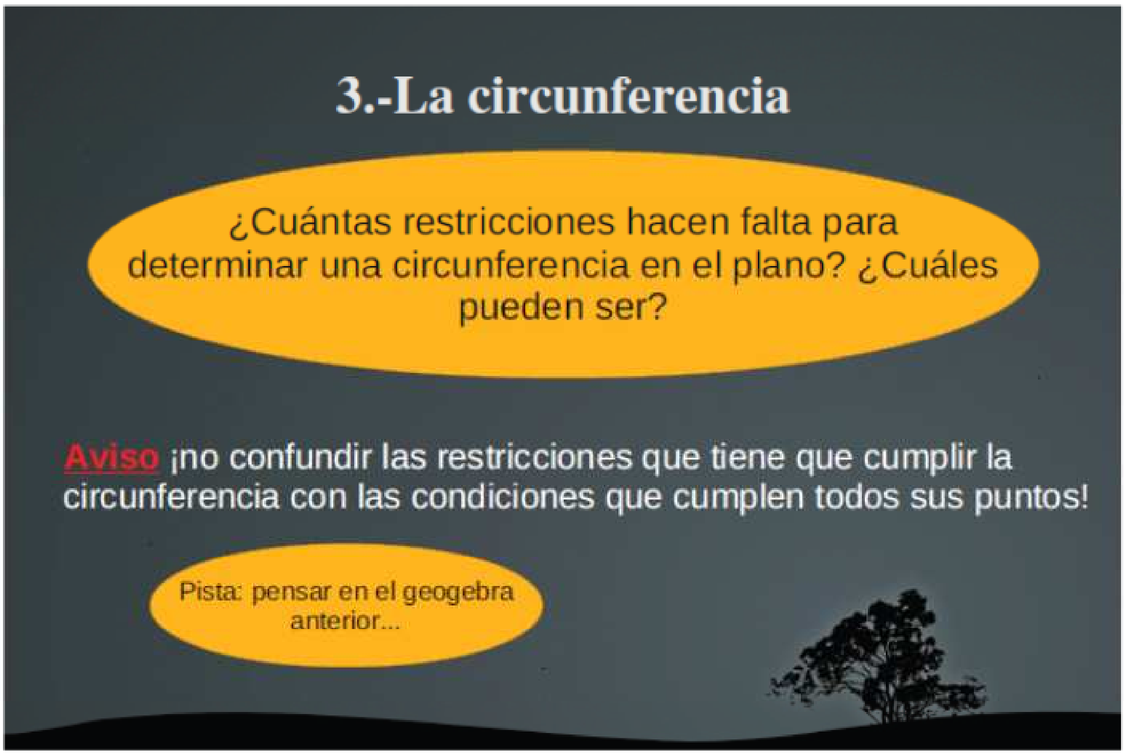

2.-Intro cónicas
Vamos a ver que todas las cónicas son lugares geométricos, esto es, que los puntos de las mismas cumplen una serie de condiciones geométricas que las determinan.
¿Cuál es el cono recto?
¿Cuál tiene más volumen?
(h es la misma)

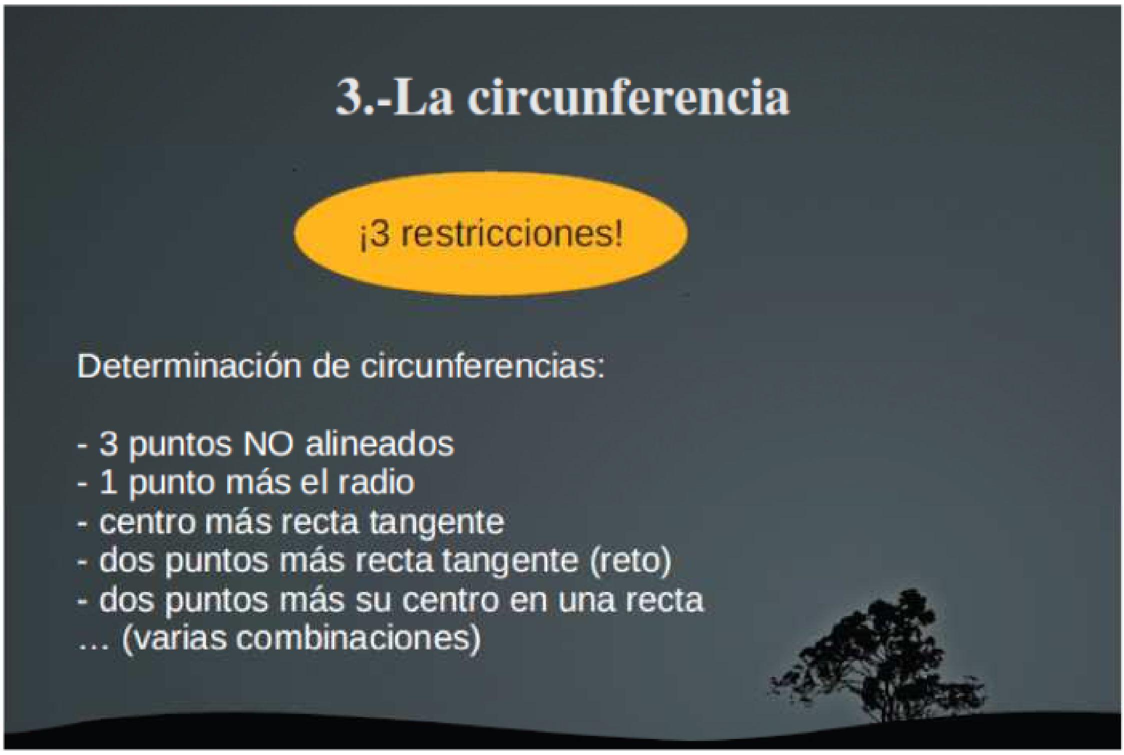

Circunferencia
Elipse
Parábola
Hipérbola

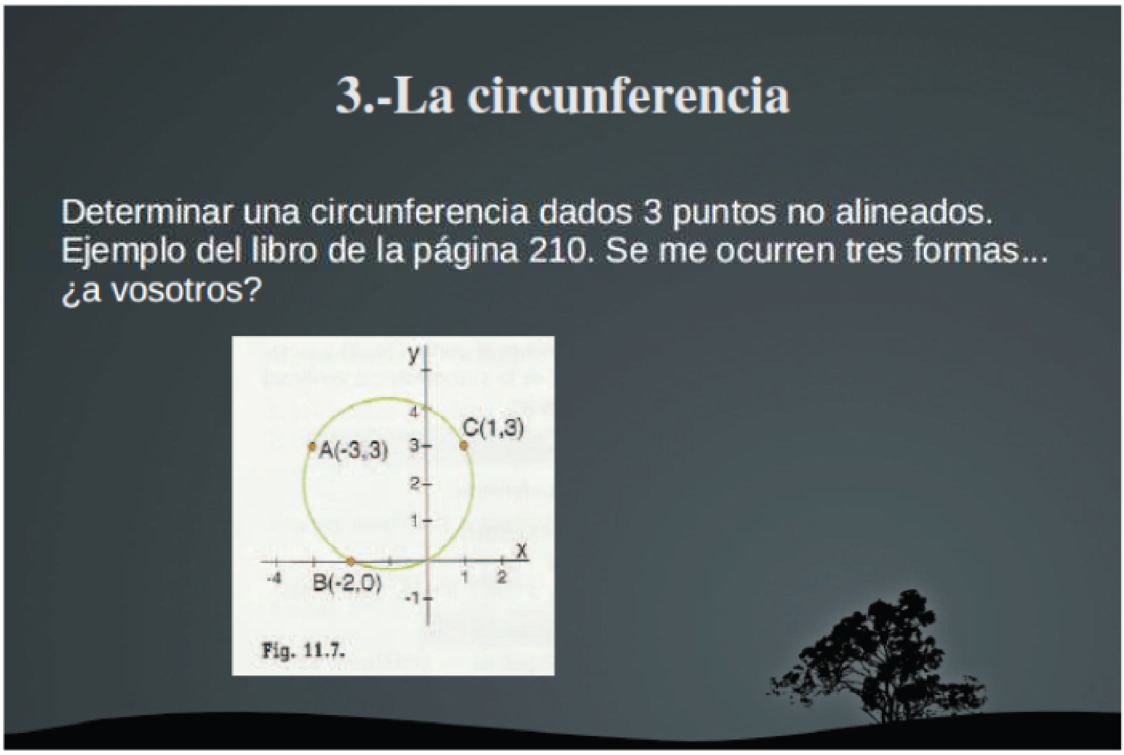

Cónicas y lugares geométricos:
clase 3
La circunferencia
(da para 2 clases y pico)


3.-La circunferencia
La circunferencia es el LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS QUE EQUIDISTAN DE UN PUNTO FIJO. Ese punto fijo será el centro y la distancia la llamamos radio.
¡Pínchame!


3.-La circunferencia
¡Horror! ¿Hay que aprenderse todo esto? Pues sí y no... hay que entenderlo y sacarla con la fórmula de la distancia que ya sabéis
Ejemplo sencillito:
Centro = (1,2)
Radio = 4
¿Y si pasa por el origen?


3.-La circunferencia
¿Cuántas restricciones hacen falta para determinar una circunferencia en el plano? ¿Cuáles pueden ser?
Aviso ¡no confundir las restricciones que tiene que cumplir la circunferencia con las condiciones que cumplen todos sus puntos!
Pista: pensar en el geogebra anterior...


3.-La circunferencia
¡3 restricciones!
Determinación de circunferencias:
- 3 puntos NO alineados
- 1 punto más el radio
- centro más recta tangente
- dos puntos más recta tangente (reto)
- dos puntos más su centro en una recta
… (varias combinaciones)


3.-La circunferencia
Determinar una circunferencia dados 3 puntos no alineados.
Ejemplo del libro de la página 210. Se me ocurren tres formas...
¿a vosotros?
A(-3,3)
C(1,3)
B(-2,0)
Fig. 11.7.

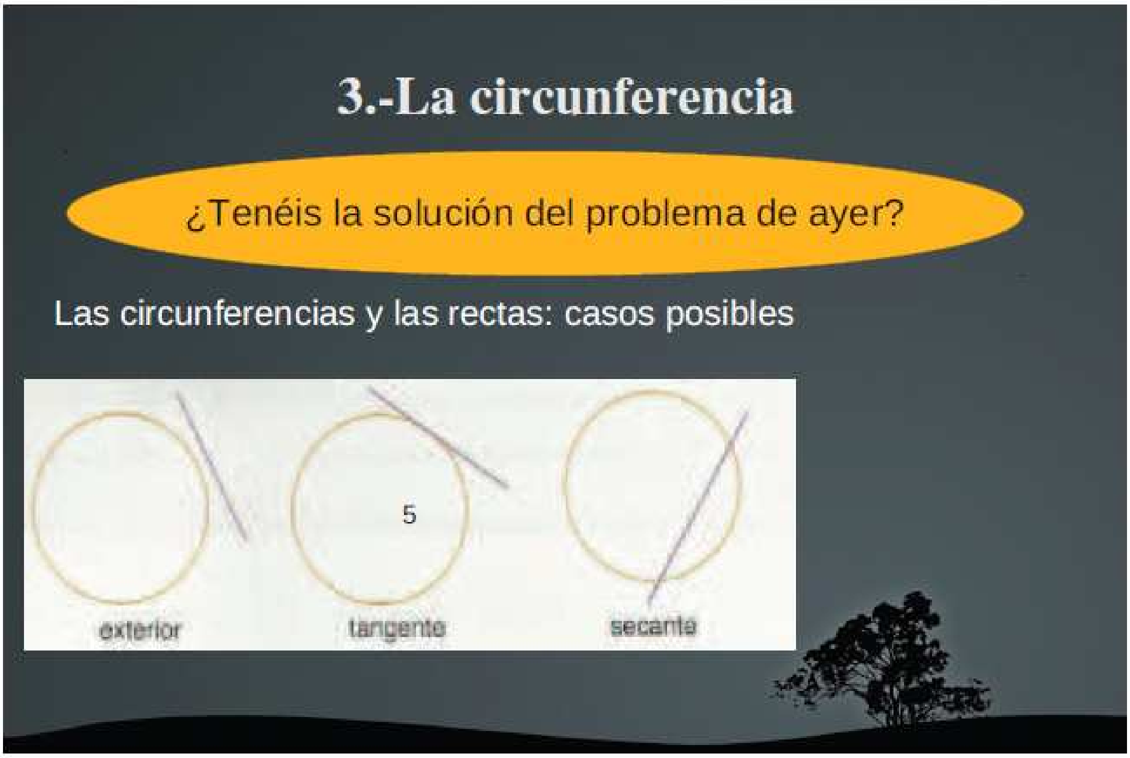
3.-La circunferencia

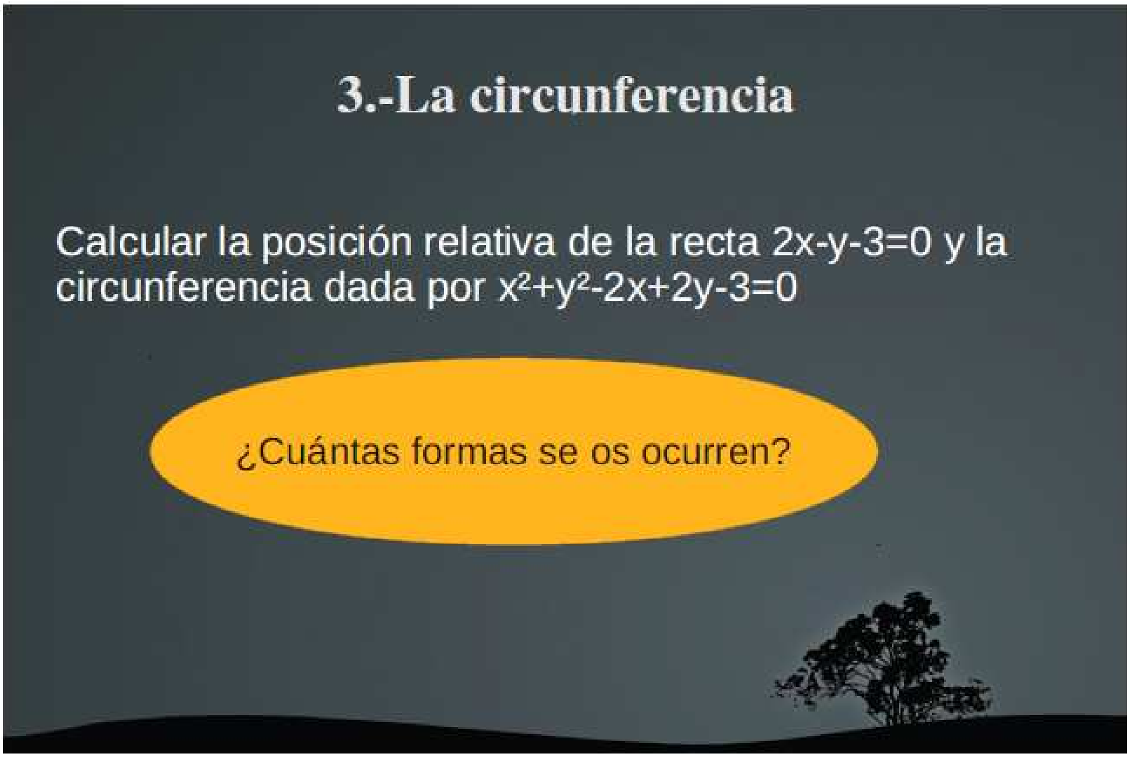
Queremos regar un prado aprovechando al máximo su superficie.
Para ello usaremos regadío por pivote.

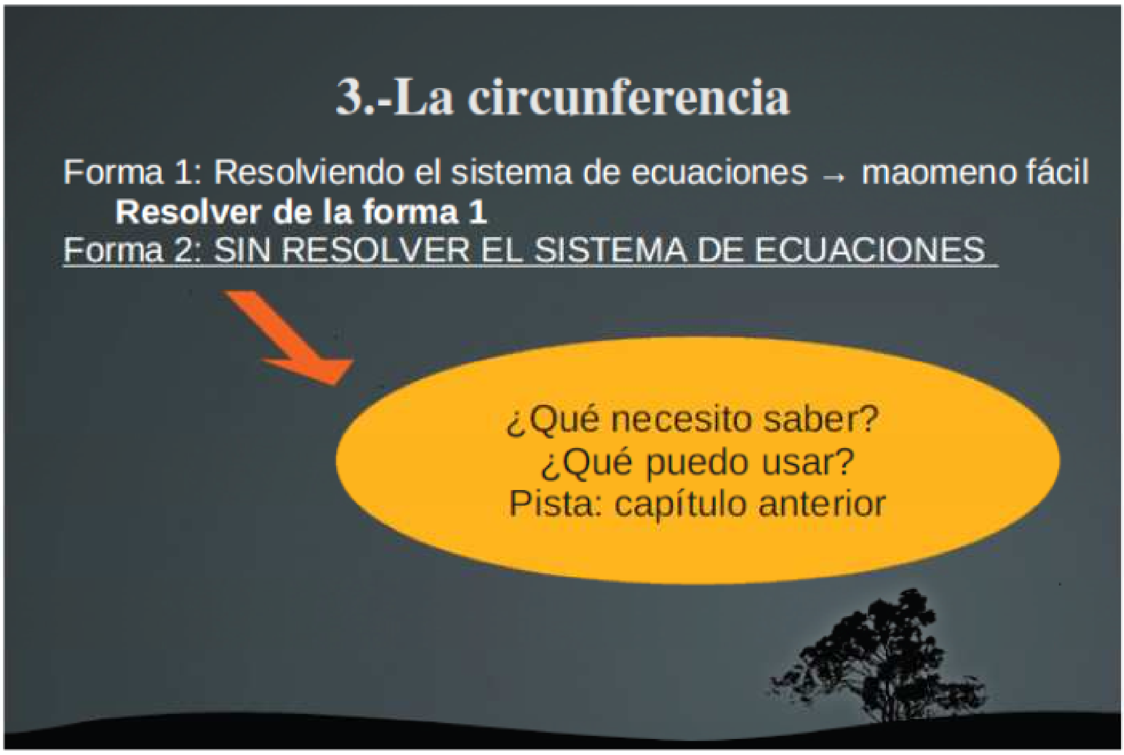
3.-La circunferencia

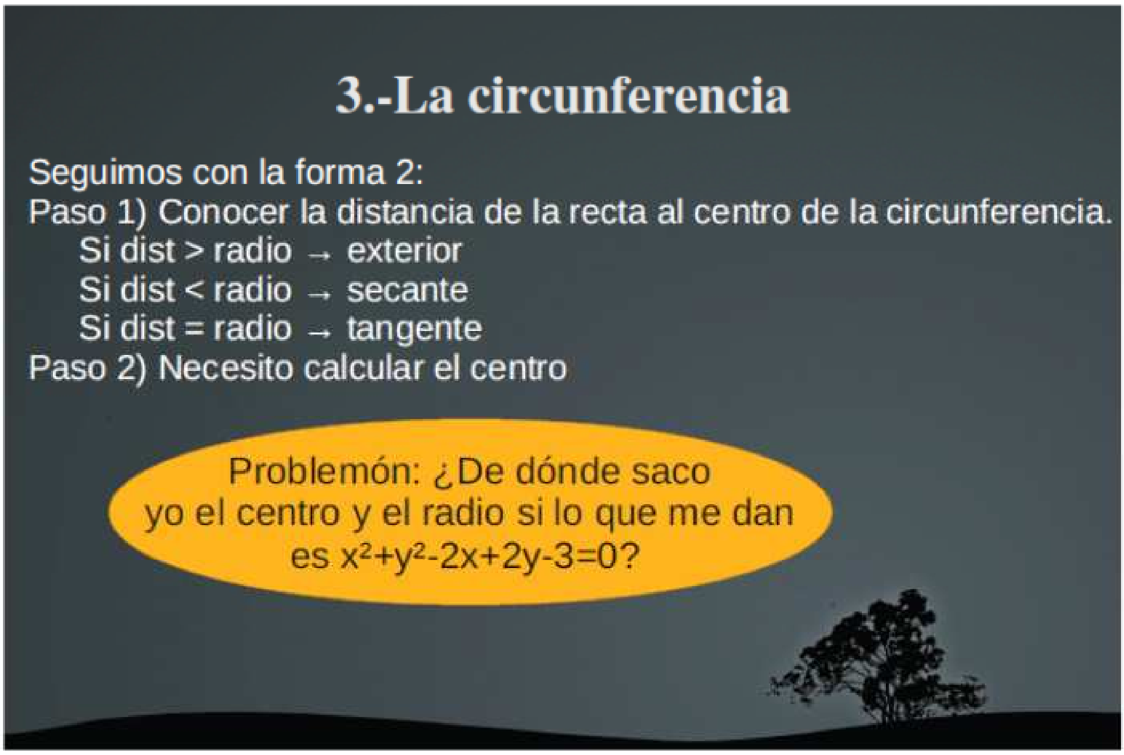
El centro tiene que estar por donde pasa la tubería, que sigue la recta x-y=3. En A=(5,5) y B=(0,2) hay dos postes de alta tensión que no hay que tocar

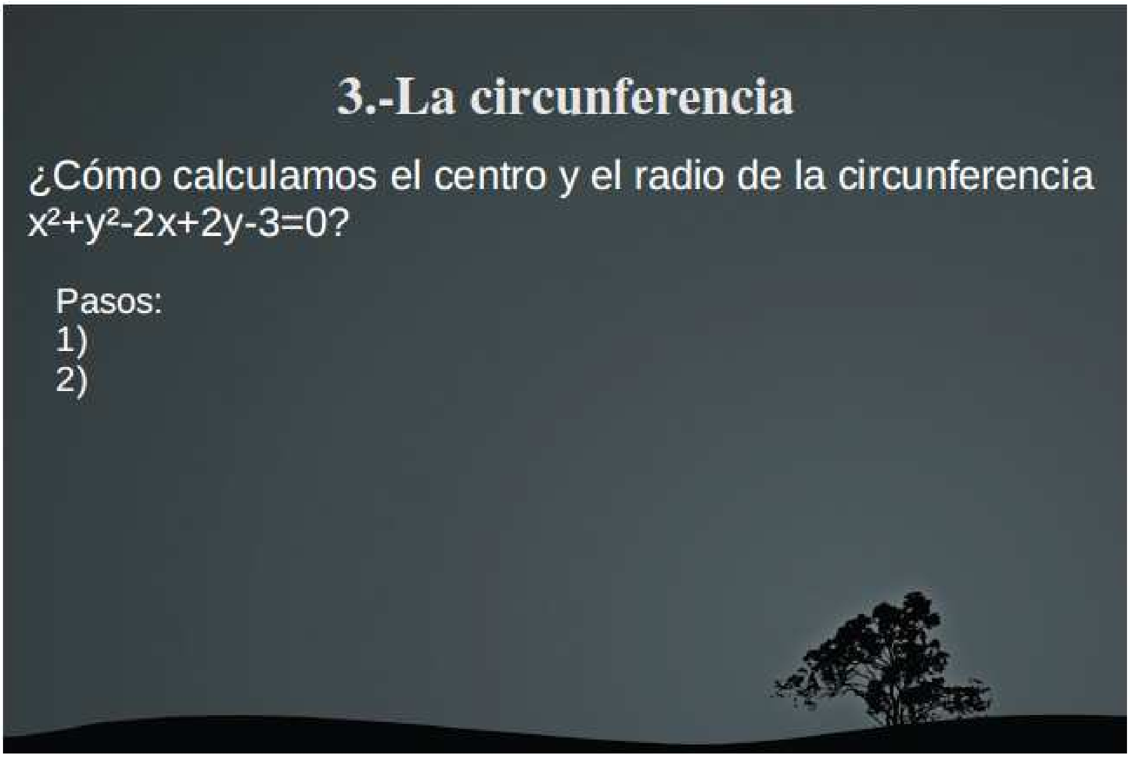
¡Manos a la obra!

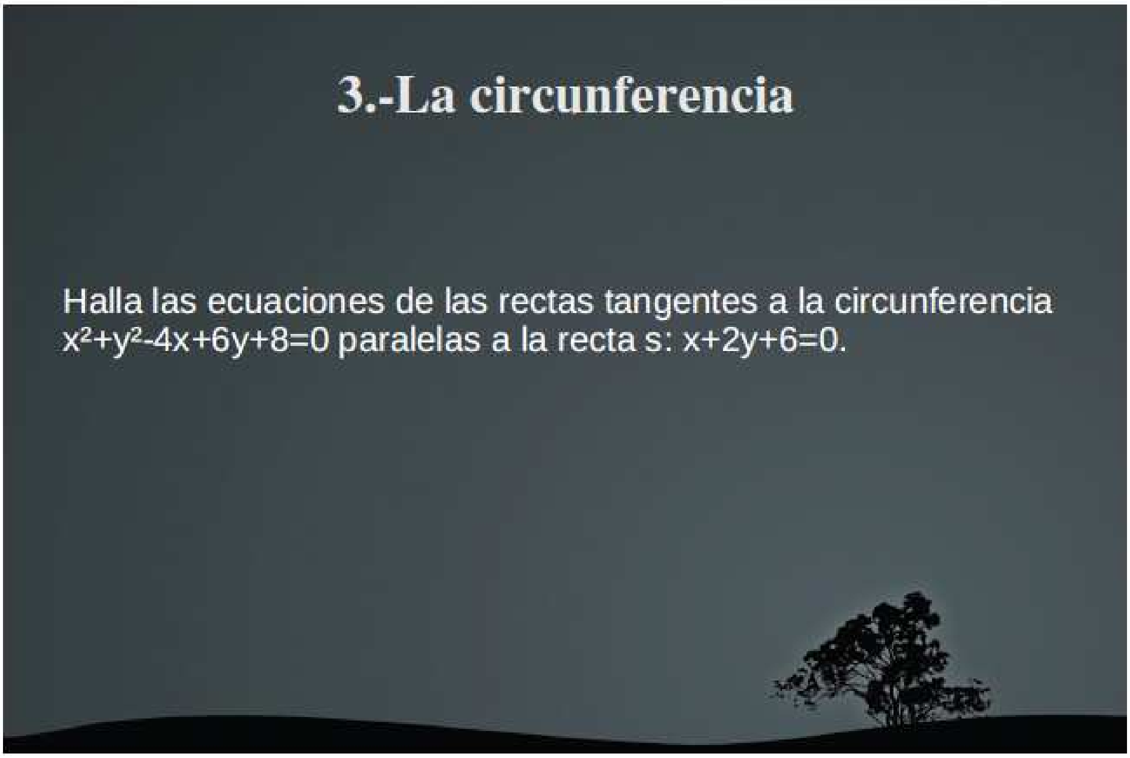

3.-La circunferencia
¿Tenéis la solución del problema de ayer?
Las circunferencias y las rectas: casos posibles
5
exterior
tangente
secante


3.-La circunferencia
Calcular la posición relativa de la recta 2x-y-3=0 y la circunferencia dada por x²+y²-2x+2y-3=0
¿Cuántas formas se os ocurren?


3.-La circunferencia
Forma 1: Resolviendo el sistema de ecuaciones → maomeno fácil
Resolver de la forma 1
Forma 2: SIN RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES
¿Qué necesito saber?
¿Qué puedo usar?
Pista: capítulo anterior


3.-La circunferencia
Seguimos con la forma 2:
Paso 1) Conocer la distancia de la recta al centro de la circunferencia.
Si dist > radio → exterior
Si dist < radio → secante
Si dist = radio → tangente
Paso 2) Necesito calcular el centro
Problemón: ¿De dónde saco
yo el centro y el radio si lo que me dan
es $x^2+y^2-2x+2y-3=0$?

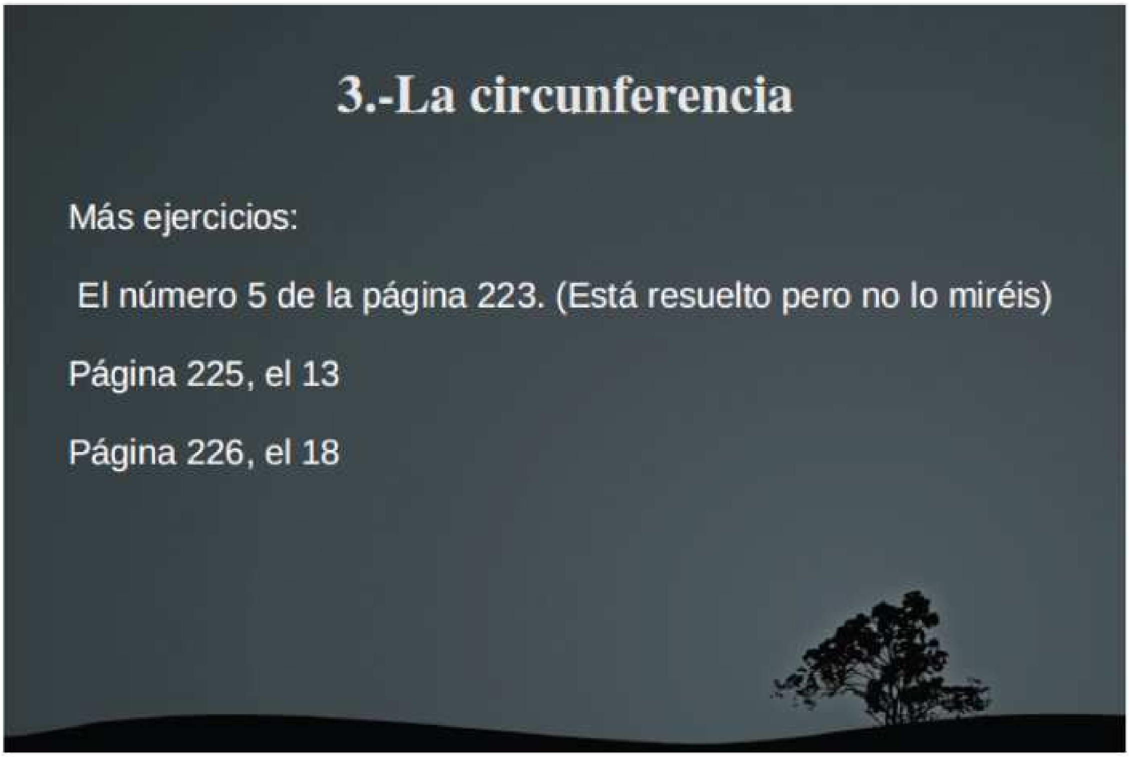

3.-La circunferencia
¿Cómo calculamos el centro y el radio de la circunferencia
$x^2+y^2-2x+2y-3=0$?
Pasos:
1)
2)

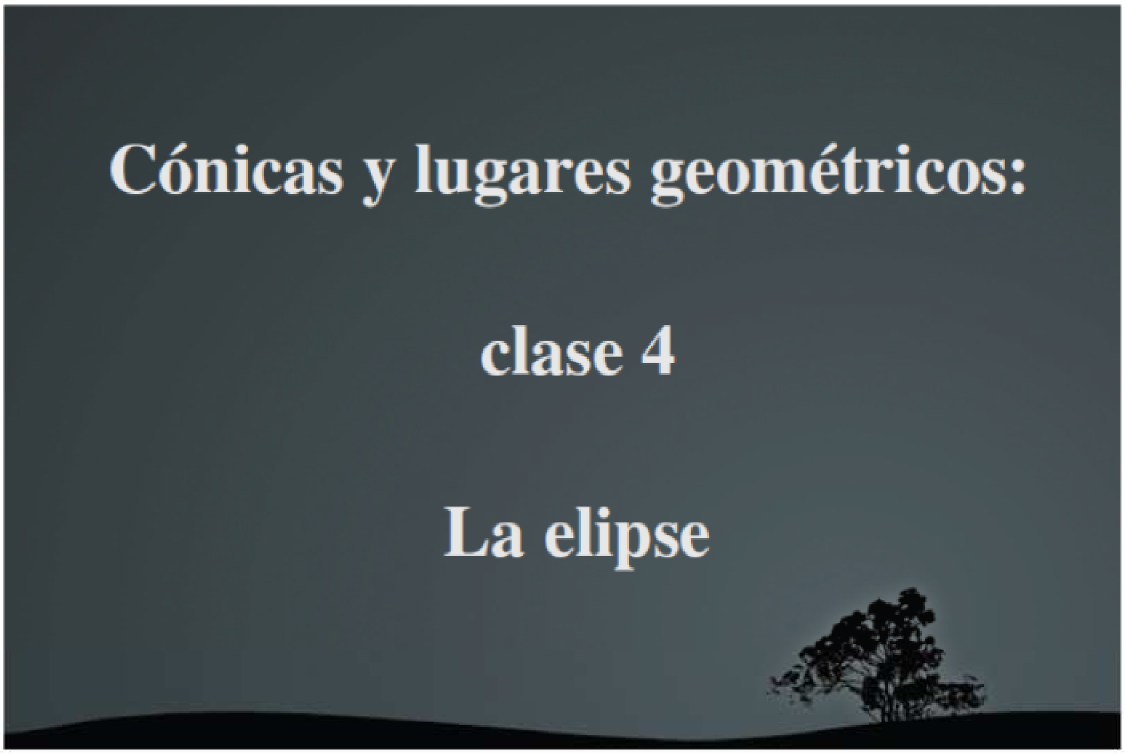

3.-La circunferencia
Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia
$x^2+y^2-4x+6y+8=0$ paralelas a la recta s: $x+2y+6=0$.

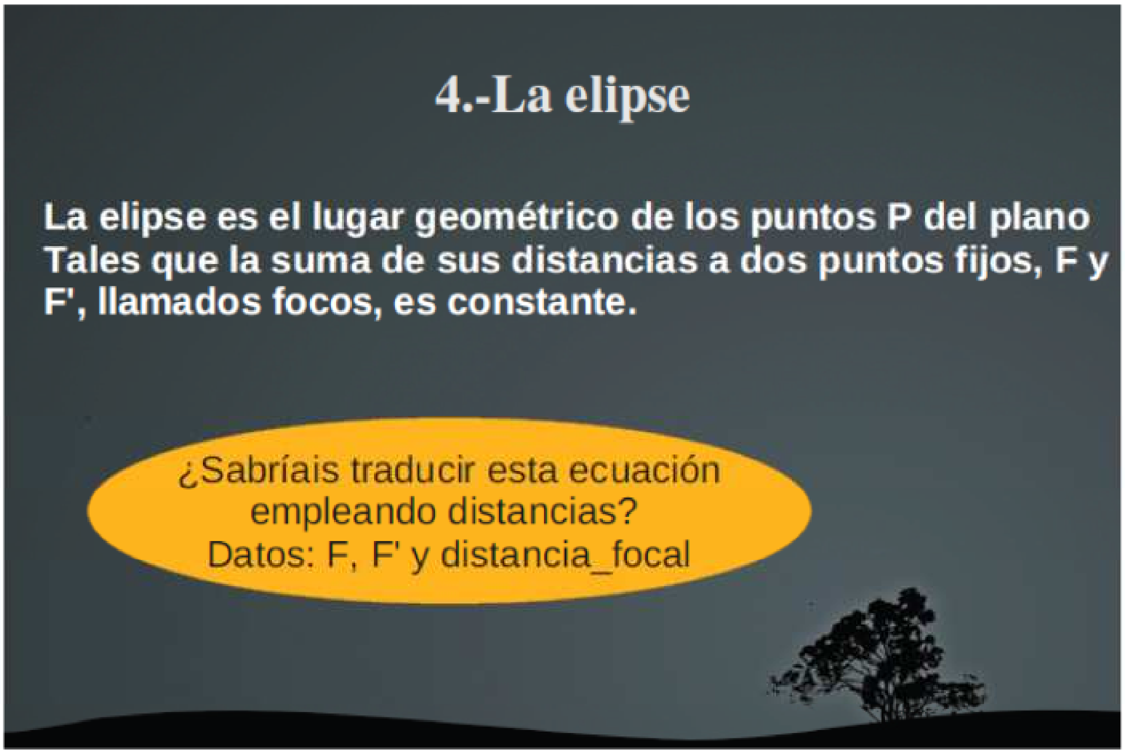
3.-La circunferencia

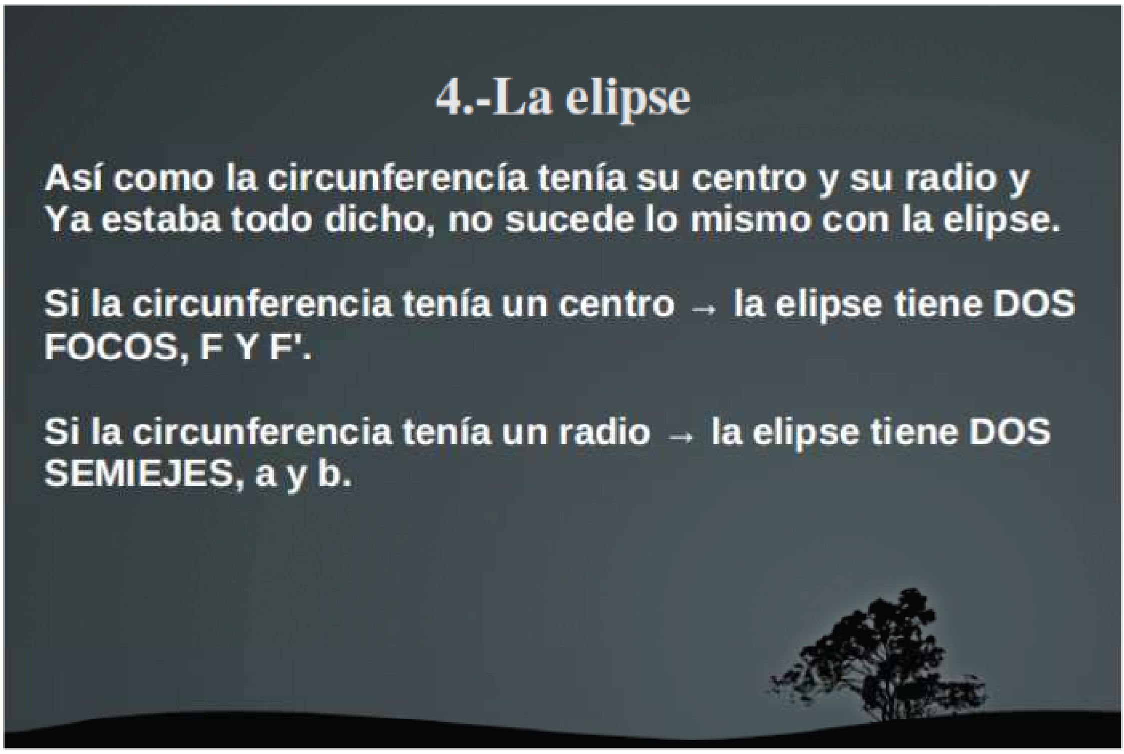
Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2+2x-4y-3=0$ perpendiculares a la recta s: $x-y+3=0$.

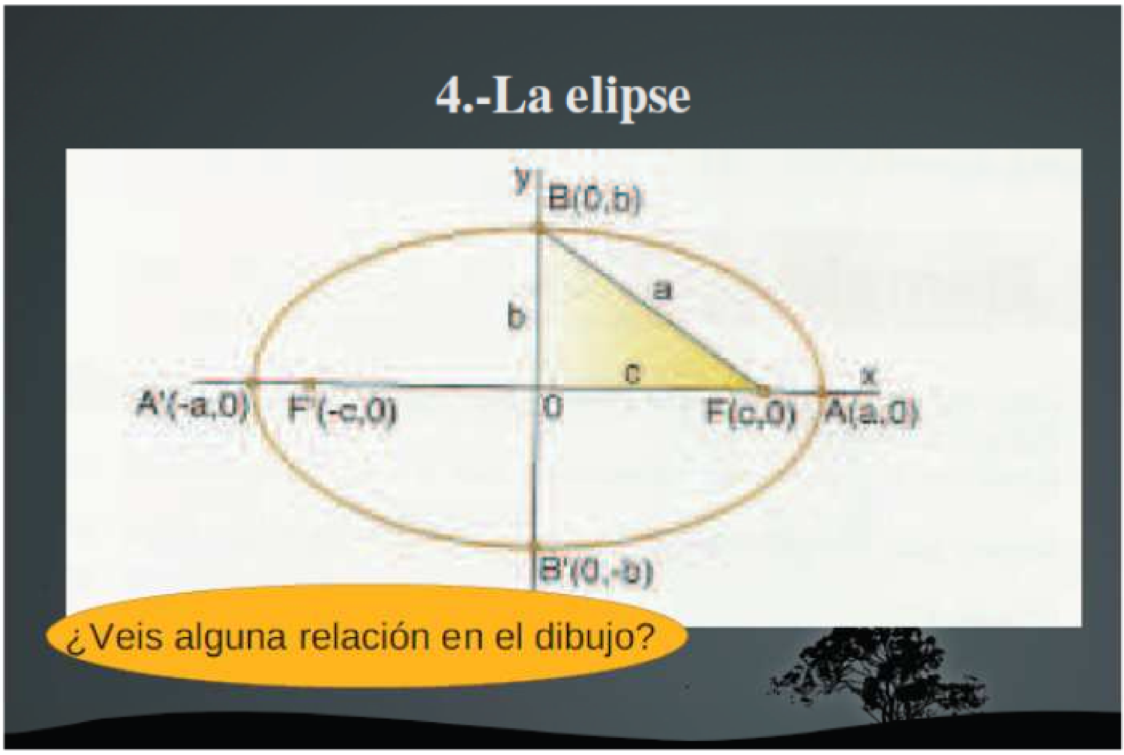

3.-La circunferencia
Y por supuesto...
Ya falta menos!


3.-La circunferencia
Más ejercicios:
El número 5 de la página 223. (Está resuelto pero no lo miréis)
Página 225, el 13
Página 226, el 18


Cónicas y lugares geométricos:
clase 4
La elipse


4.-La elipse
La elipse es el lugar geométrico de los puntos P del plano
Tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, F y
F', llamados focos, es constante.
¿Sabríais traducir esta ecuación
empleando distancias?
Datos: F, F' y distancia_focal


4.-La elipse
Así como la circunferencía tenía su centro y su radio y Ya estaba todo dicho, no sucede lo mismo con la elipse.
Si la circunferencia tenía un centro → la elipse tiene DOS FOCOS, F Y F'.
Si la circunferencia tenía un radio → la elipse tiene DOS SEMIEJES, a y b.


4.-La elipse
y
B(0,b)
a
b
c
x
A'(-a,0)
F'(-c,0)
0
F(c,0)
A(a,0)
B'(0,-b)
¿Veis alguna relación en el dibujo?

4.-La elipse

Es hora de trabajar. Calculad la elipse que tiene por focos los puntos F=(4,0) y F'=(-4,0). La suma de distancias de los Focos a cualquier punto de la elipse es 10.

Operando y simplificando se llega a algo como:

$2x^2+2y^2=68$, no???

...

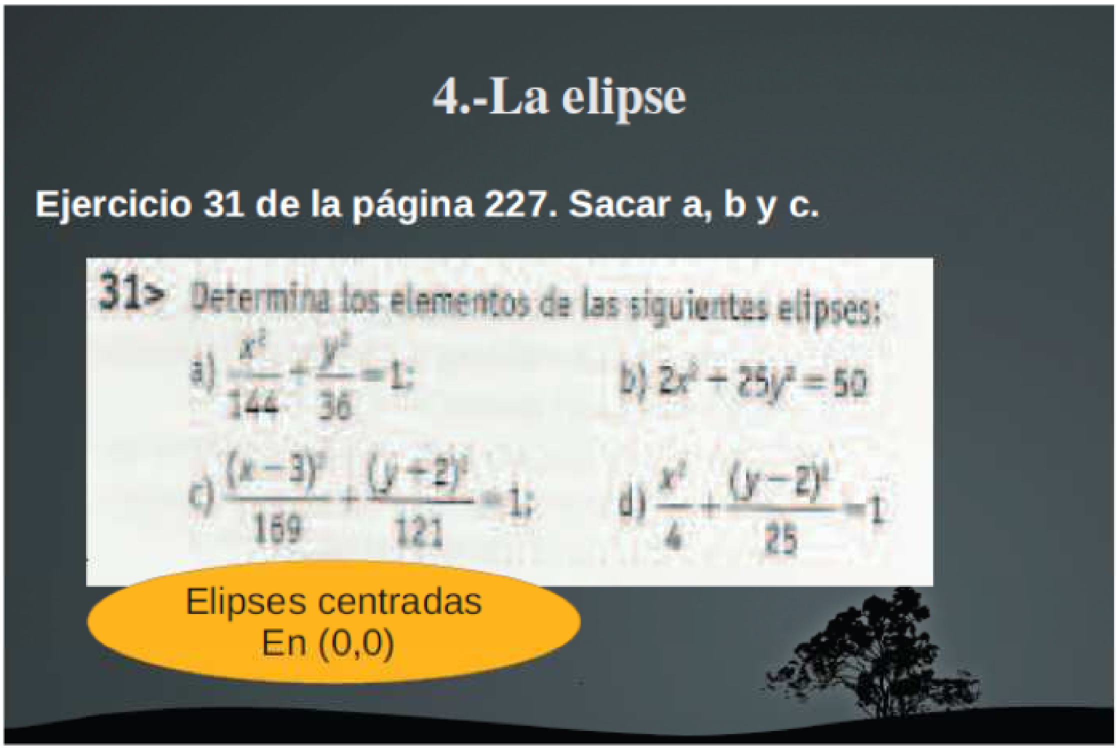
4.-La elipse

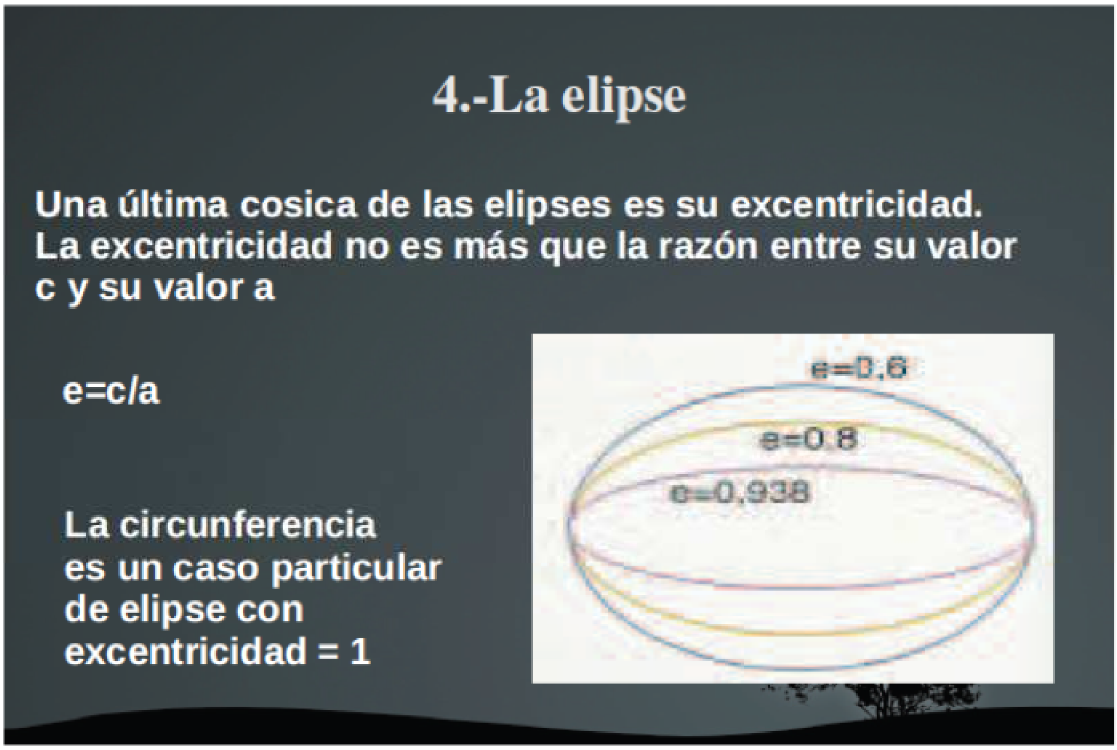
Ya veis que estas ecuaciones pueden empezar a tomar forma un tanto 'chunga'.

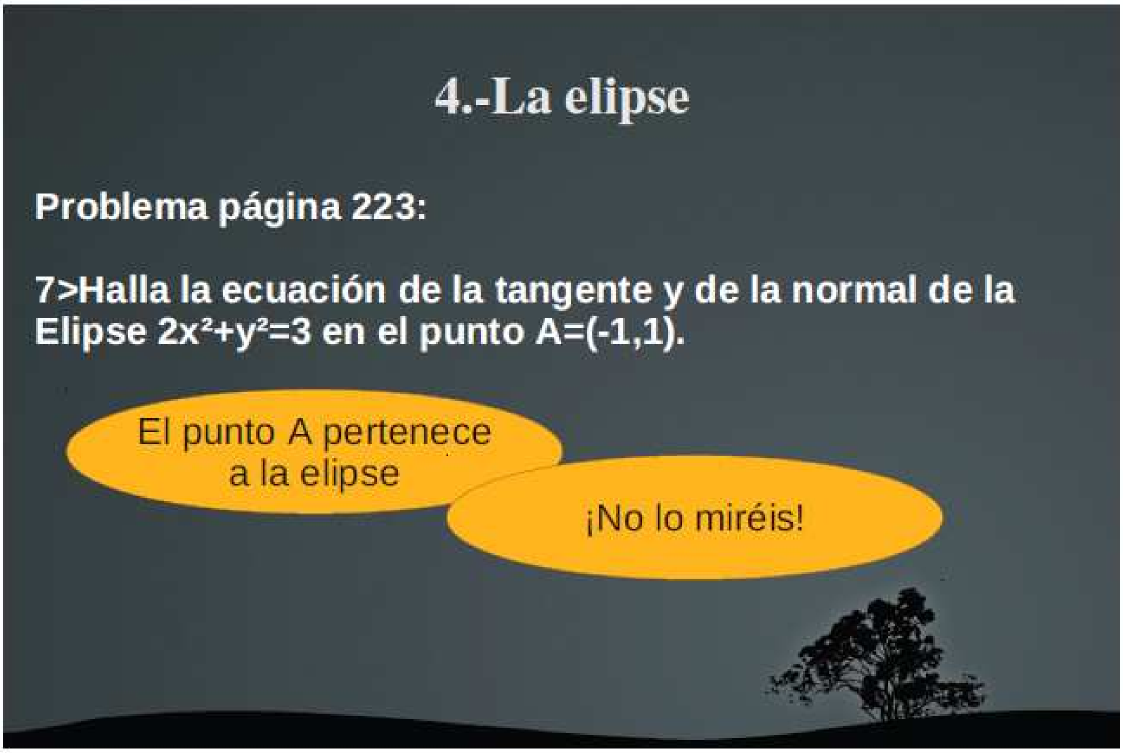
Pero para estas situaciones está la ecuación reducida o canónica de la elipse, que para una elipse centrada en el origen tan sólo hace falta que nos den a y b

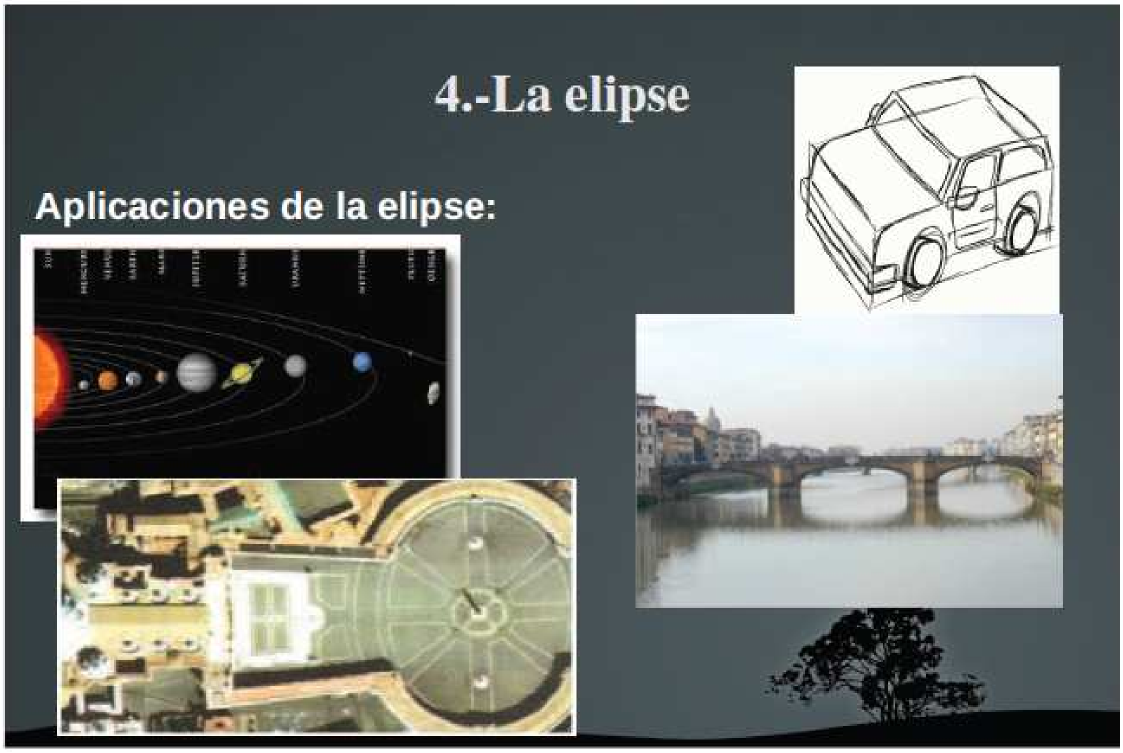
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

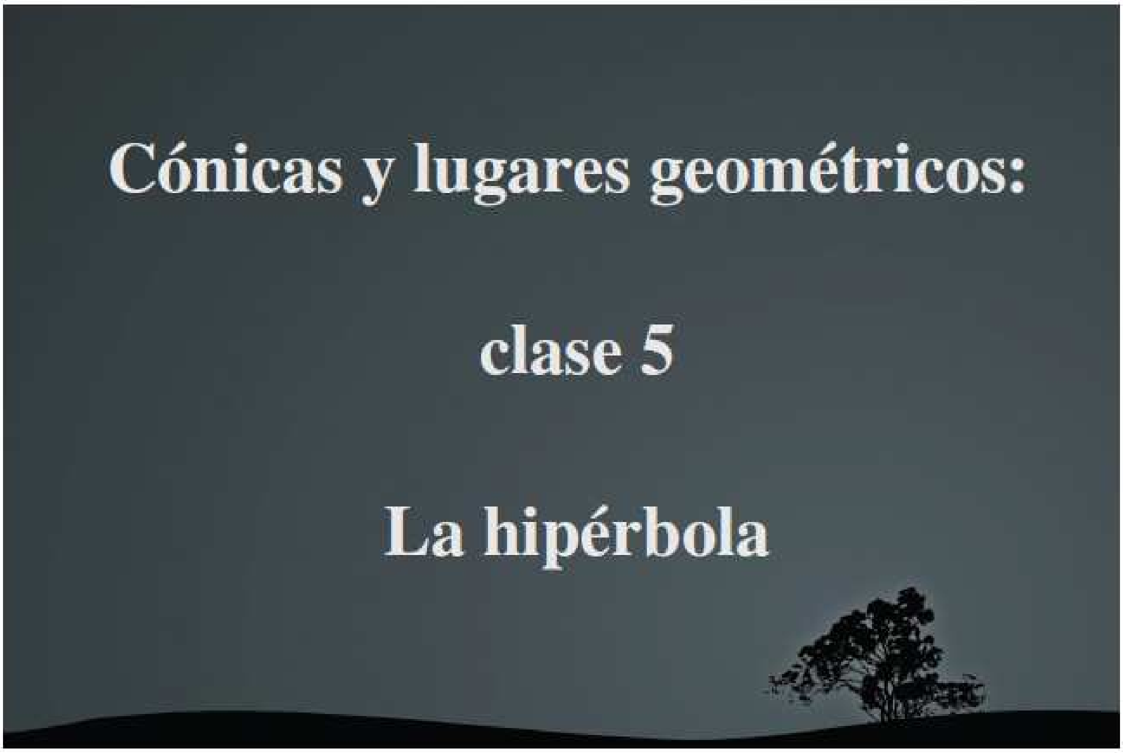
Su deducción viene en la pág 214, si tenéis tiempo y ganas...


4.-La elipse
Ejercicio 31 de la página 227. Sacar a, b y c.
31> Determina los elementos de las siguientes elipses:
a) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=1$;
b) $2x^2+25y^2=50$
c) $\frac{(x-3)^2}{169}+\frac{(y+2)^2}{121}=1$;
d) $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$
Elipses centradas
En (0,0)


4.-La elipse
Una última cosica de las elipses es su excentricidad.
La excentricidad no es más que la razón entre su valor c y su valor a
e=c/a
La circunferencia es un caso particular de elipse con excentricidad = 1
e=0,6
e=0.8
e=0,938


4.-La elipse
Problema página 223:
7>Halla la ecuación de la tangente y de la normal de la Elipse $2x^2+y^2=3$ en el punto A=(-1,1).
El punto A pertenece a la elipse
¡No lo miréis!


4.-La elipse
Aplicaciones de la elipse:

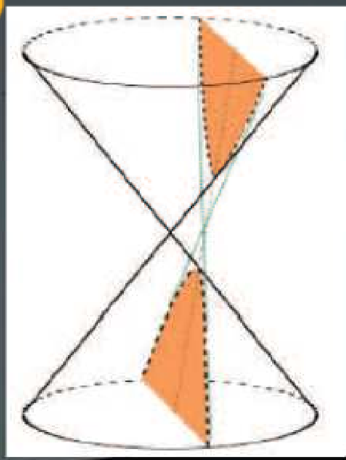

Cónicas y lugares geométricos:
clase 5
La hipérbola


5.-La hipérbola
La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la diferencia de sus distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos, F y F', llamados focos, es constante.
|dist(P,Foco)-dist(P,Foco')|=constante

5.-La hipérbola

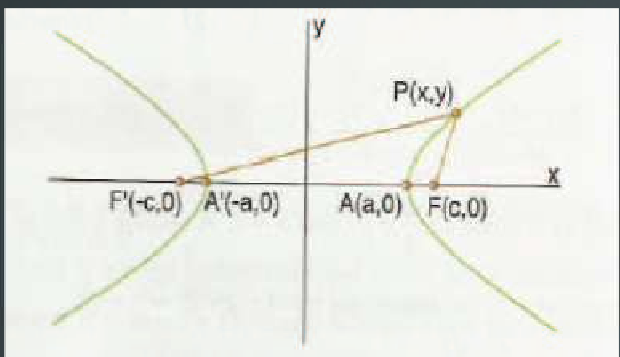
OJO CON EL VALOR ABSOLUTO:
¿Cuántas ramas tendrá?

Efectivamente: 2

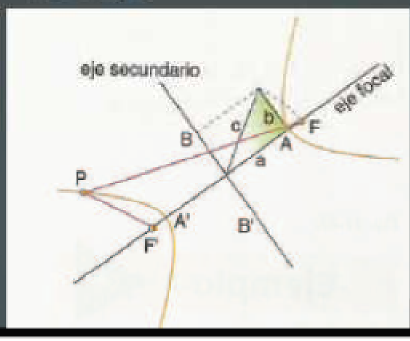


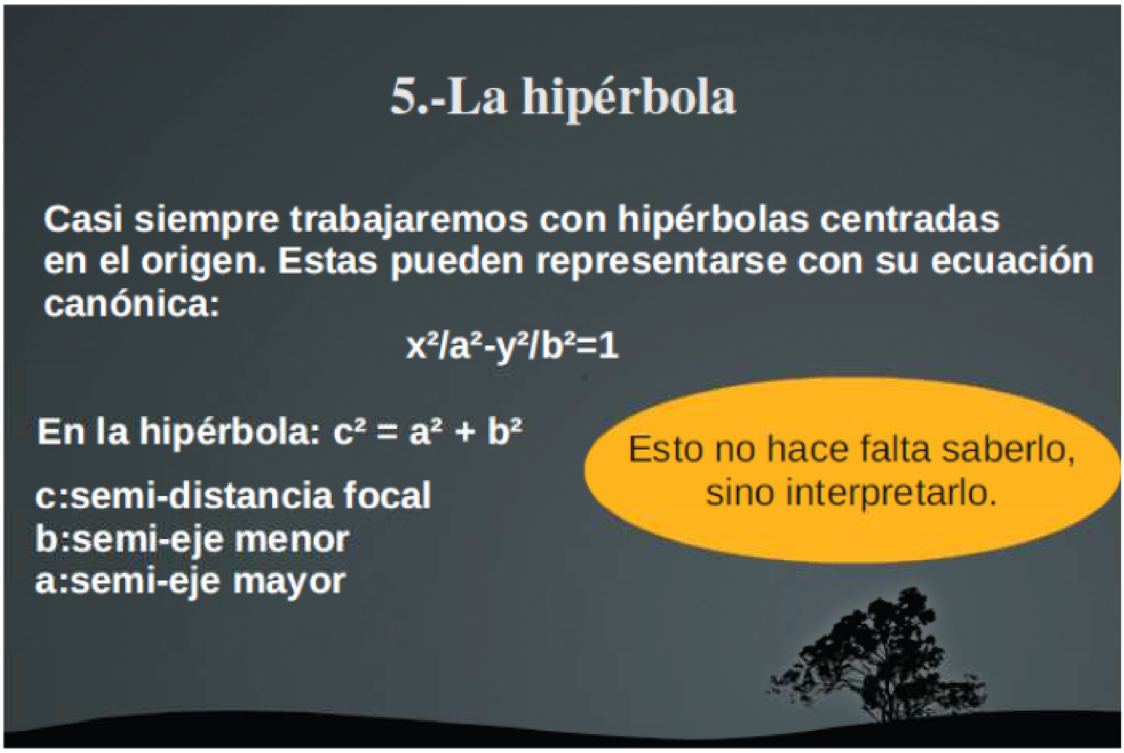
5.-La hipérbola

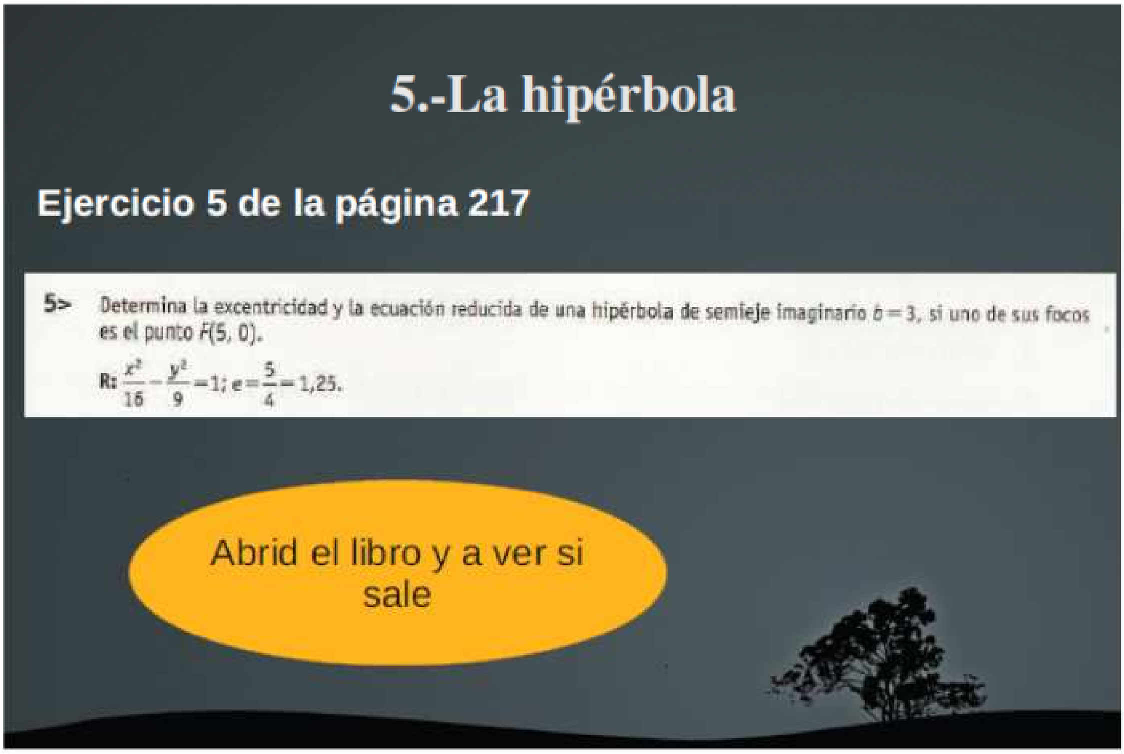
La hipérbola se parece mucho a la elipse

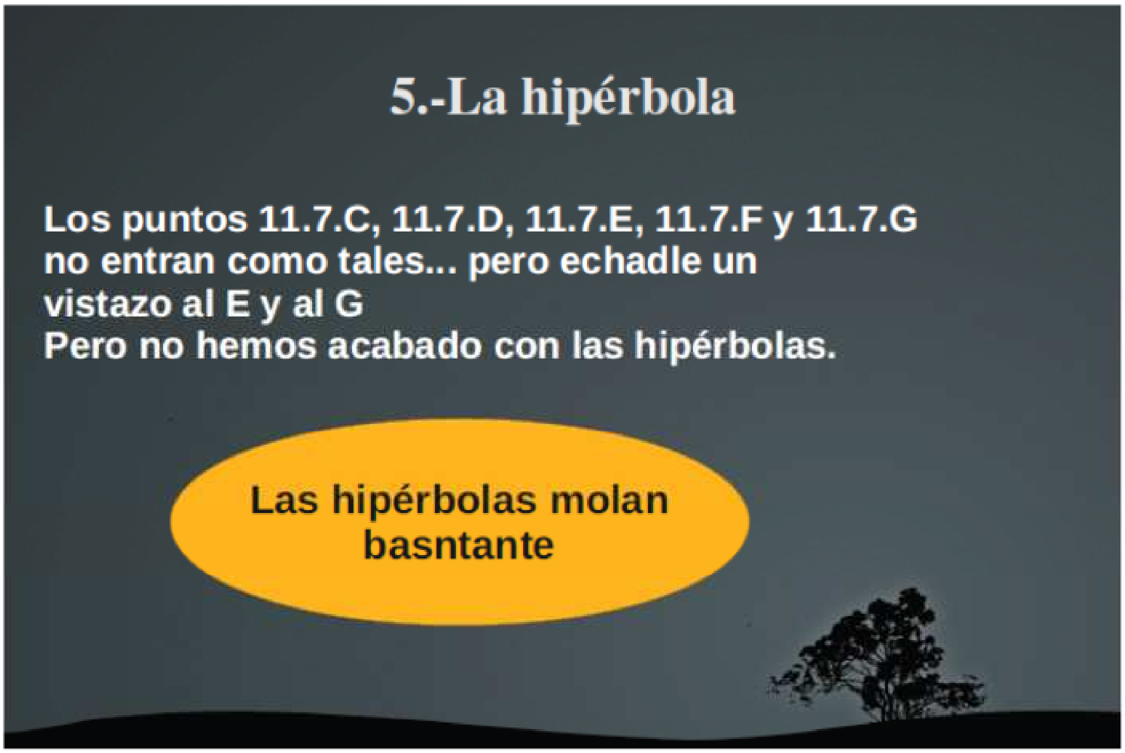


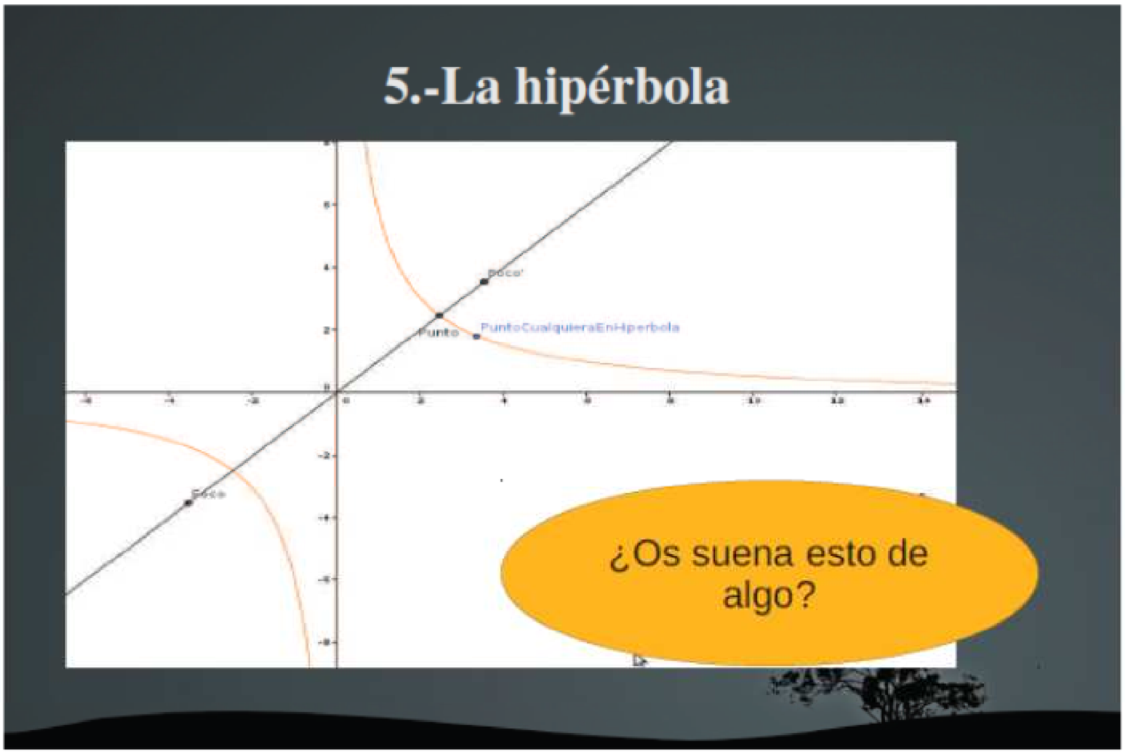
- -Tiene dos focos
- -a, b y c
- -La excentricidad sigue siendo e = c/a

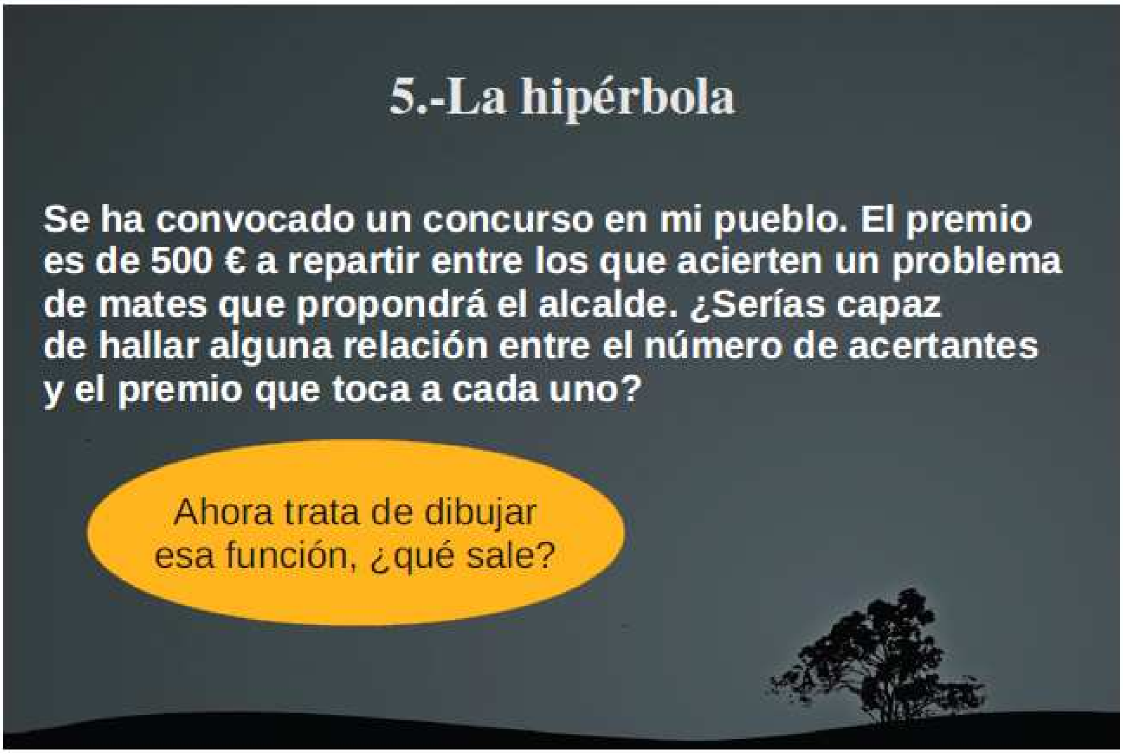



5.-La hipérbola
Casi siempre trabajaremos con hipérbolas centradas en el origen. Estas pueden representarse con su ecuación canónica:
$x^2/a^2-y^2/b^2=1$
En la hipérbola: $c^2 = a^2 + b^2$
c:semi-distancia focal
b:semi-eje menor
a:semi-eje mayor
Esto no hace falta saberlo, sino interpretarlo.


5.-La hipérbola
Ejercicio 5 de la página 217
5> Determina la excentricidad y la ecuación reducida de una hipérbola de semieje imaginario $b=3$, si uno de sus focos es el punto $F(5, 0)$.
R: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; $e=\frac{5}{4}=1{,}25$.
Abrid el libro y a ver si sale


5.-La hipérbola
Los puntos 11.7.C, 11.7.D, 11.7.E, 11.7.F y 11.7.G
no entran como tales... pero echadle un
vistazo al E y al G
Pero no hemos acabado con las hipérbolas.
Las hipérbolas molan
basntante


5.-La hipérbola
PuntoCualquieraEnHiperbola
Punto
¿Os suena esto de
algo?


5.-La hipérbola
Se ha convocado un concurso en mi pueblo. El premio es de 500 € a repartir entre los que acierten un problema de mates que propondrá el alcalde. ¿Serías capaz de hallar alguna relación entre el número de acertantes y el premio que toca a cada uno?
Ahora trata de dibujar esa función, ¿qué sale?

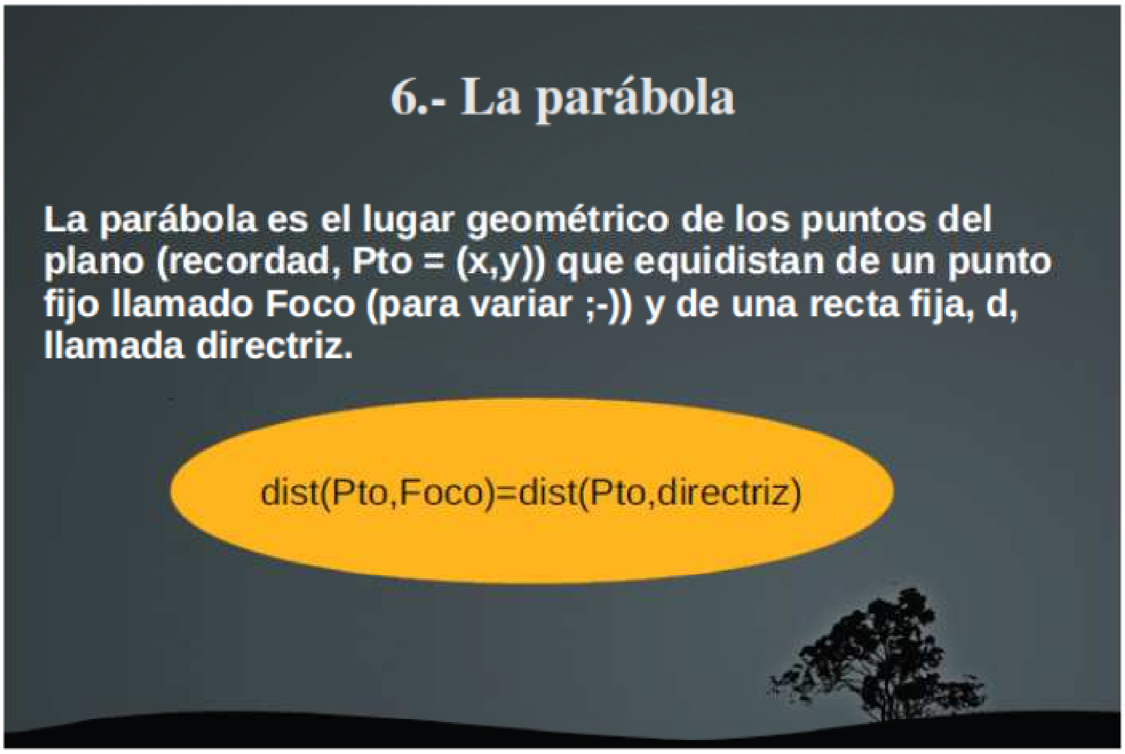

5.-La hipérbola
Aplicaciones
+ trayectorias de cuerpos
...

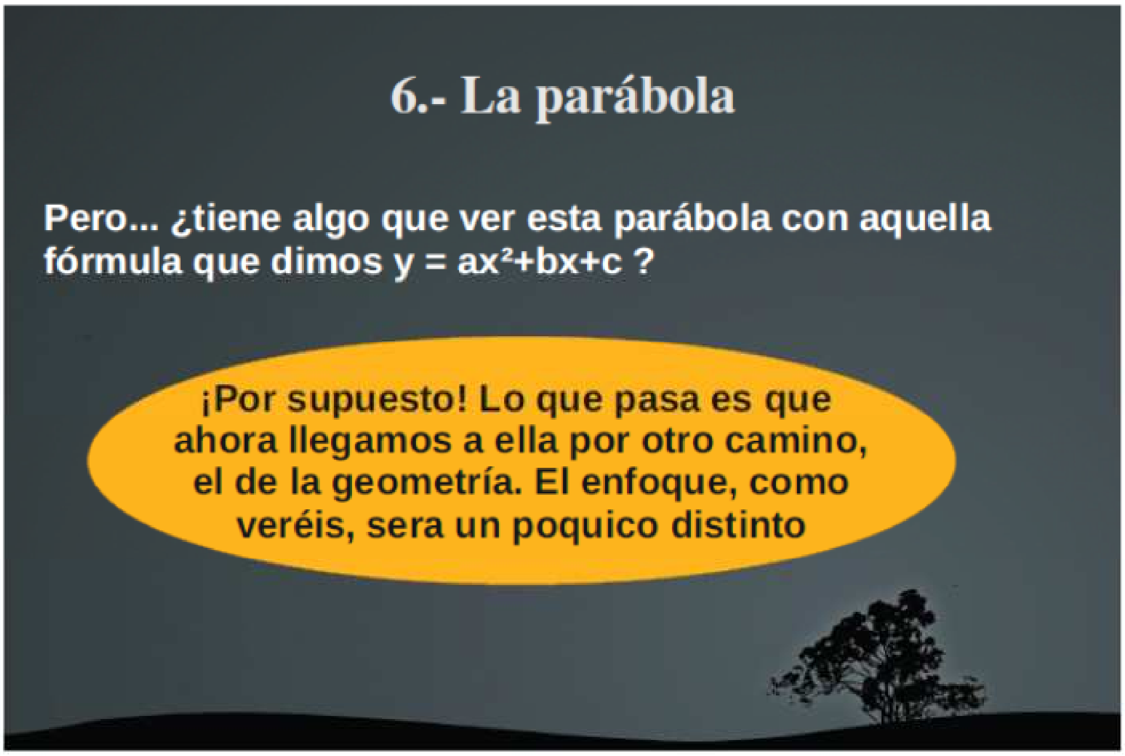
Cónicas y lugares geométricos:

clase 6

La parábola

6.- La parábola


6.- La parábola
La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano (recordad, Pto = (x,y)) que equidistan de un punto fijo llamado Foco (para variar ;-)) y de una recta fija, d, llamada directriz.
dist(Pto,Foco)=dist(Pto,directriz)


6.- La parábola
Pero... ¿tiene algo que ver esta parábola con aquella fórmula que dimos y = ax²+bx+c ?
¡Por supuesto! Lo que pasa es que ahora llegamos a ella por otro camino, el de la geometría. El enfoque, como veréis, sera un poquico distinto

6.- La parábola

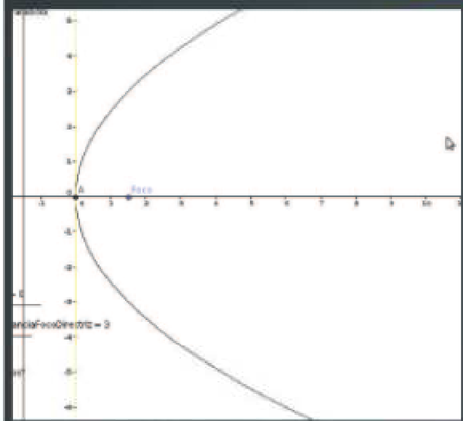
Conociendo la directriz d, x = -p/2, y el foco, F=(p/2,0), vamos a obtener la ecuación de esta parábola. Dibújala para p=3 obtén su vértice.

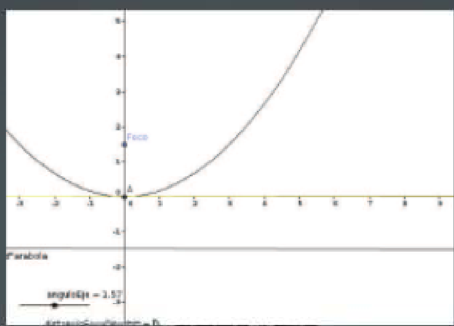
Tratad de hacerlo con letras, que en esta ocasión no es muy complicado

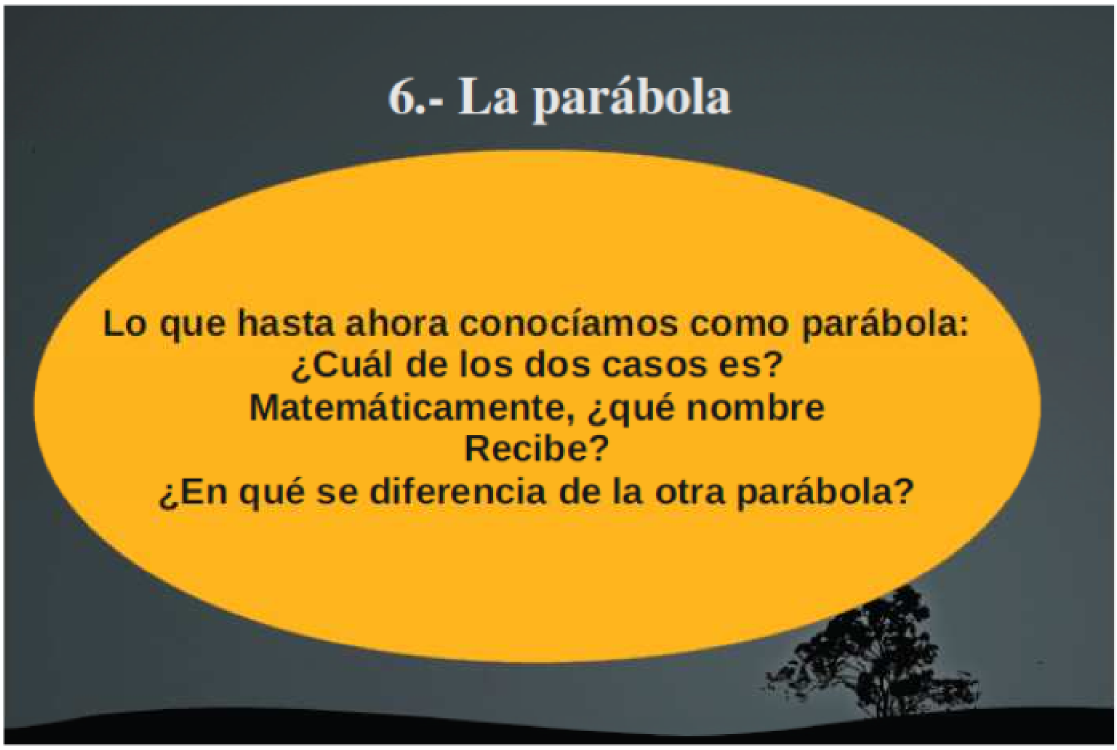
Solución: $y^2=2px$

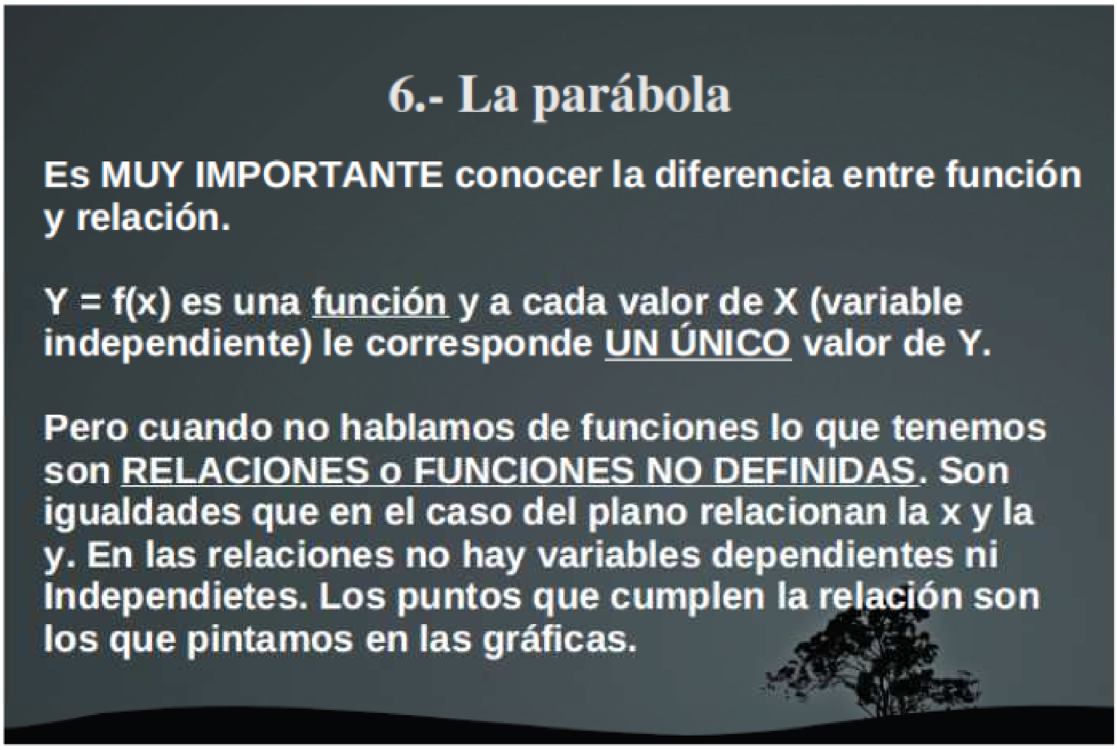
6.- La parábola

¿¿No os llama algo la atención??

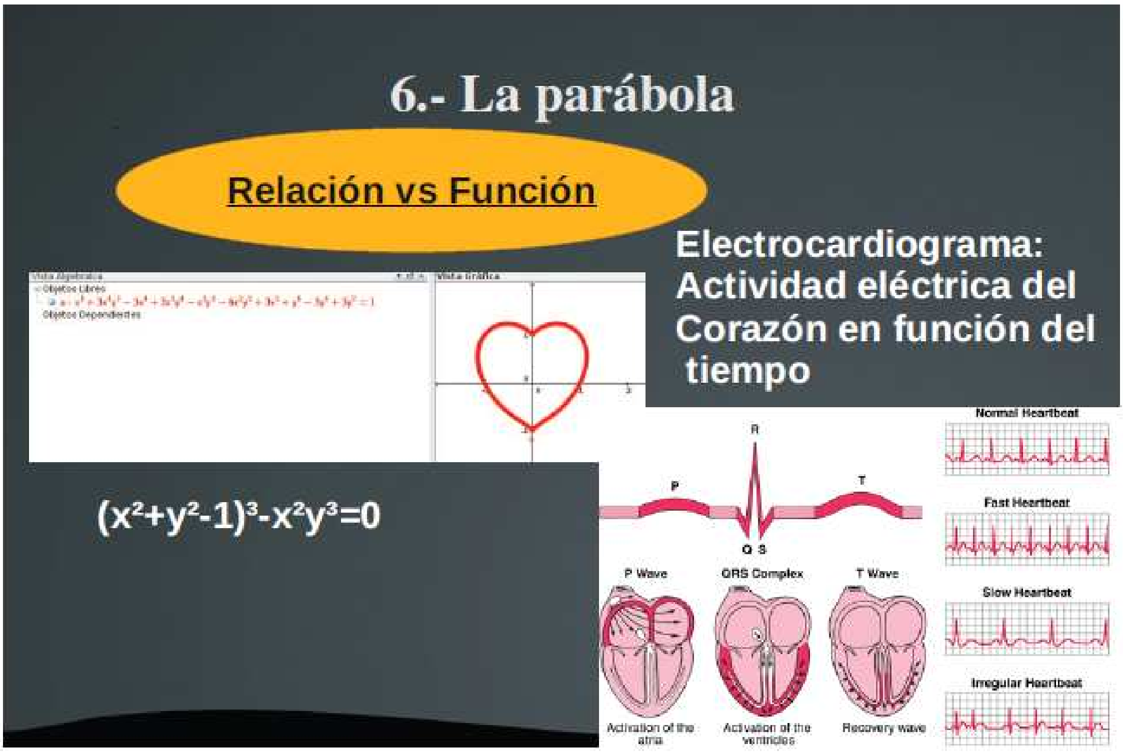


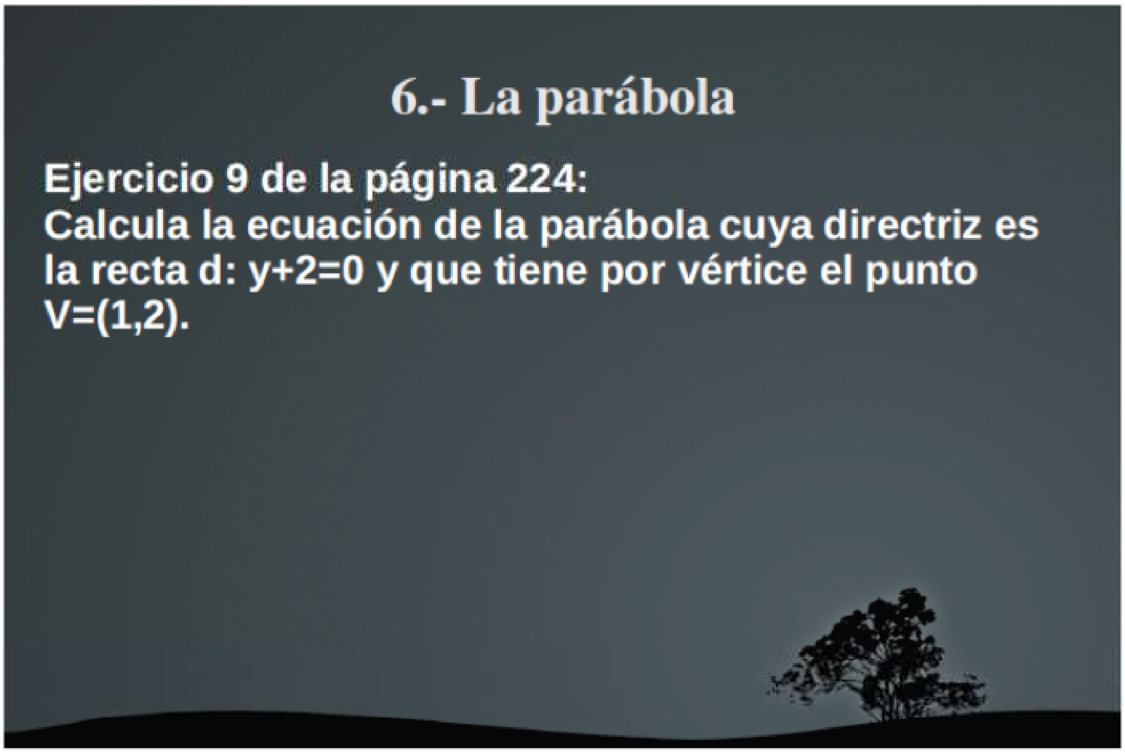


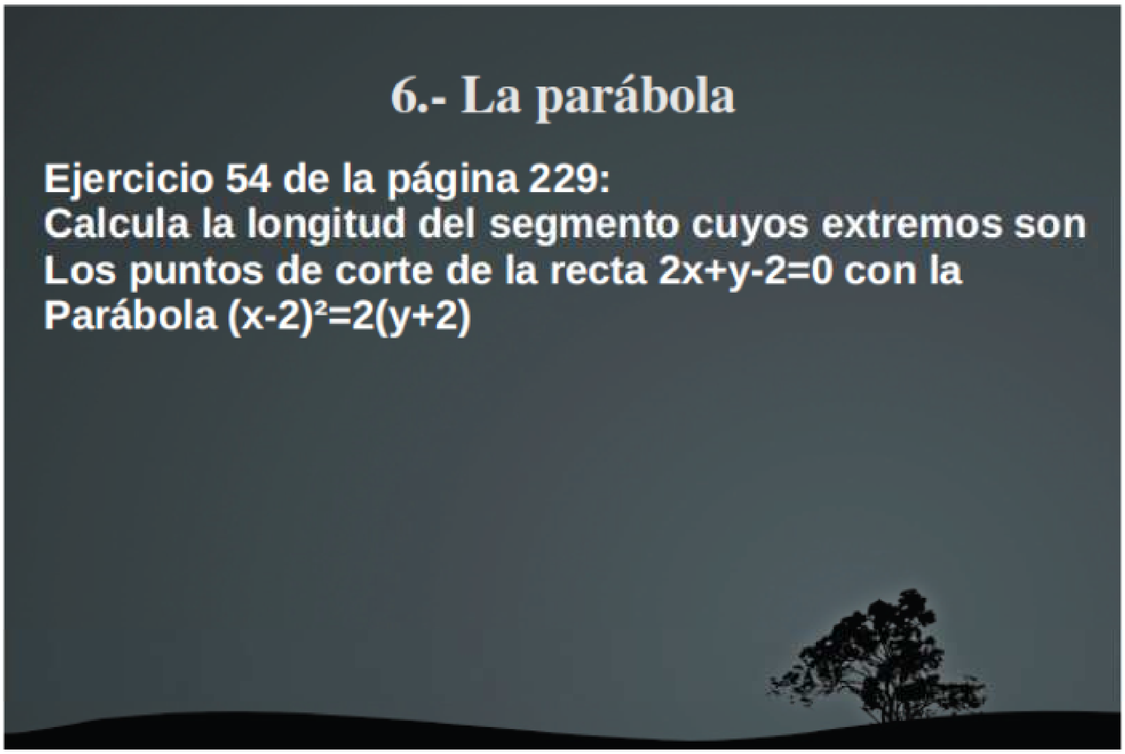

6.- La parábola
Lo que hasta ahora conocíamos como parábola:
¿Cuál de los dos casos es?
Matemáticamente, ¿qué nombre
Recibe?
¿En qué se diferencia de la otra parábola?


6.- La parábola
Es MUY IMPORTANTE conocer la diferencia entre función y relación.
Y = f(x) es una función y a cada valor de X (variable independiente) le corresponde UN ÚNICO valor de Y.
Pero cuando no hablamos de funciones lo que tenemos son RELACIONES o FUNCIONES NO DEFINIDAS. Son igualdades que en el caso del plano relacionan la x y la y. En las relaciones no hay variables dependientes ni Independietes. Los puntos que cumplen la relación son los que pintamos en las gráficas.


6.- La parábola
Seguro que todos conocéis esta relación:
$(x^2+y^2-1)^3-x^2y^3=0$
$(x^2+y^2-1)^3-x^2y^3=0$
Os invito a que esta tarde
os bajéis el GeoGebra y abajo
del todo, donde pone entrada, escribáis
esta relación ;-)


6.- La parábola
Relación vs Función
Electrocardiograma:
Actividad eléctrica del
Corazón en función del
tiempo
$(x^2+y^2-1)^3-x^2y^3=0$
R
P
T
Q S
P Wave
QRS Complex
T Wave
Activation of the atria
Activation of the ventricles
Recovery wave
Normal Heartbeat
Fast Heartbeat
Slow Heartbeat
Irregular Heartbeat


6.- La parábola
Ejercicio 9 de la página 224:
Calcula la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta d: y+2=0 y que tiene por vértice el punto V=(1,2).


6.- La parábola
Ejercicio 54 de la página 229:
Calcula la longitud del segmento cuyos extremos son Los puntos de corte de la recta 2x+y-2=0 con la Parábola (x-2)²=2(y+2)

6.- La parábola

Ejercicio 48 de la página 229:
Encuentra la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta y=x y cuyo foco es el punto (2,0).

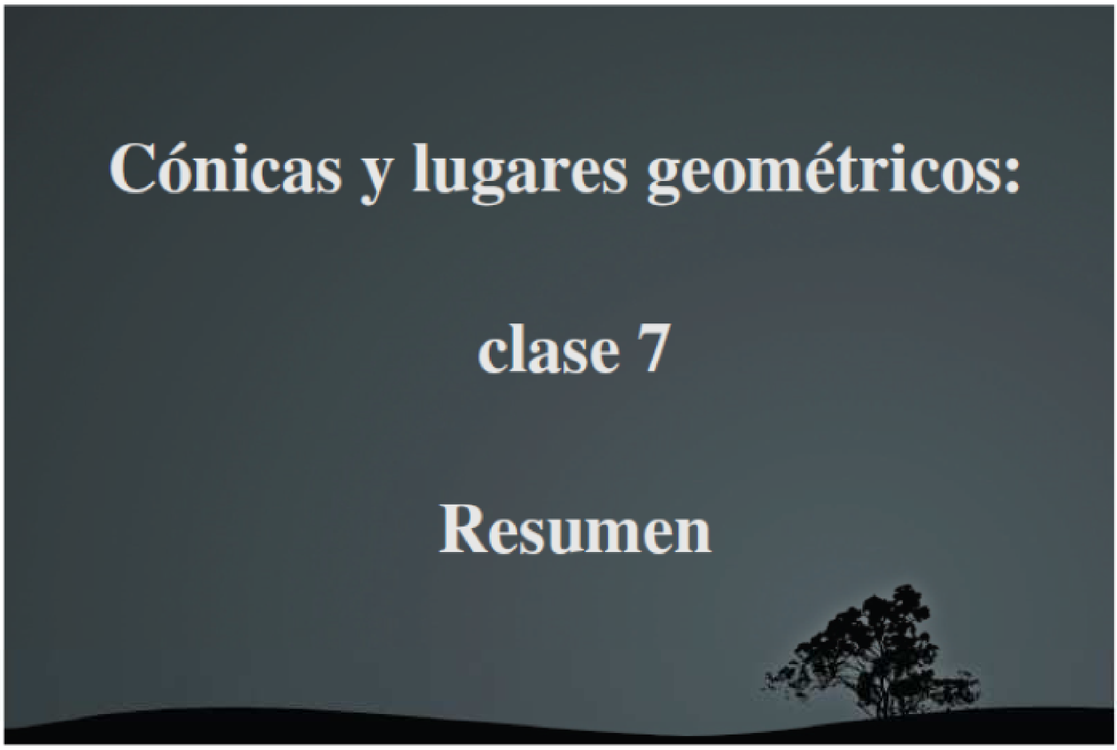
6.- La parábola

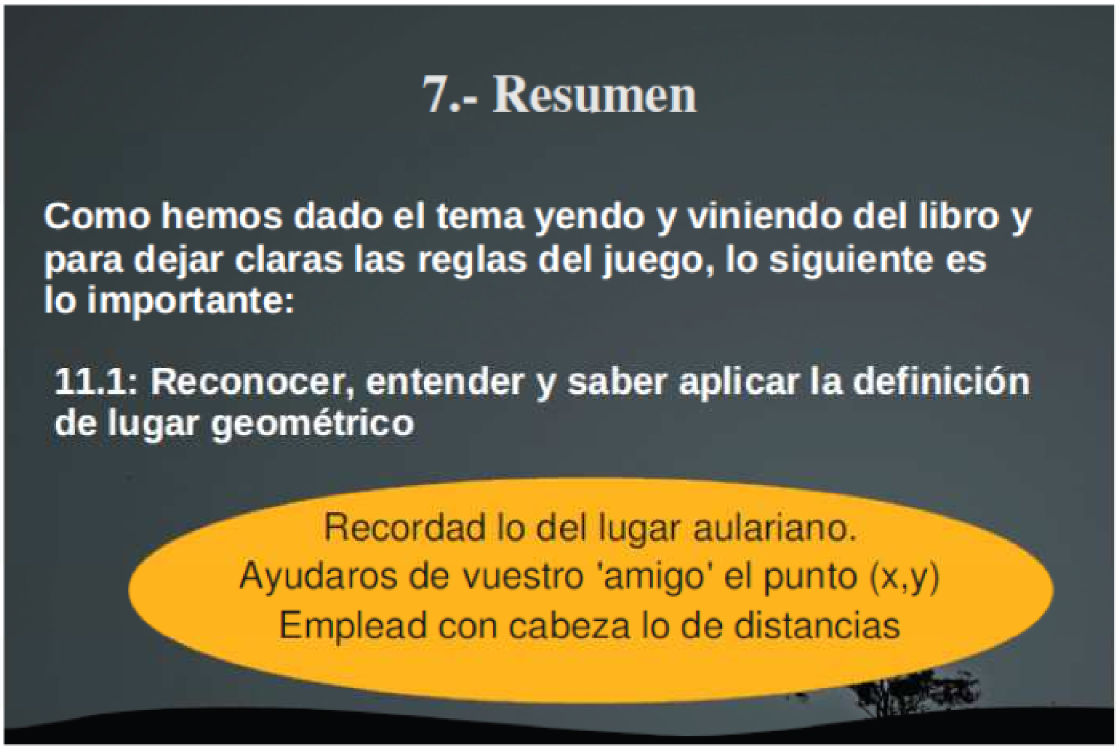
La parábola tiene muuuuuchas aplicaciones.

¿Por ejemplo?


6.- La parábola

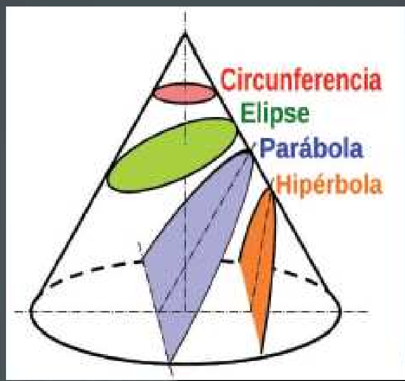

6.- La parábola
También en física...


Cónicas y lugares geométricos:
clase 7
Resumen


7.- Resumen
Como hemos dado el tema yendo y viniendo del libro y para dejar claras las reglas del juego, lo siguiente es lo importante:
11.1: Reconocer, entender y saber aplicar la definición de lugar geométrico
Recordad lo del lugar aulariano.
Ayudaros de vuestro 'amigo' el punto (x,y)
Emplead con cabeza lo de distancias

7.- Resumen

Las cónicas: cuáles son, saber de dónde vienen (el cono de Apolonio...), por qué son lugares geométricos (la propiedad que cumplen sus puntos) y alguna aplicación.



7.- Resumen

De la circunferencia:

- Es el lugar geométrico de … y entenderlo. Saber sacar su expresión.
- ¿Cómo determinar una circunferencia? 3 puntos, 2 ptos y centro en recta, ...
- Dibujar, saber pensar los pasos a seguir y ejecutarlos.
- Posición relativa de rectas y circunferencias.
- Teoría de las páginas 211 y 212 (de esta última nada!)

7.- Resumen

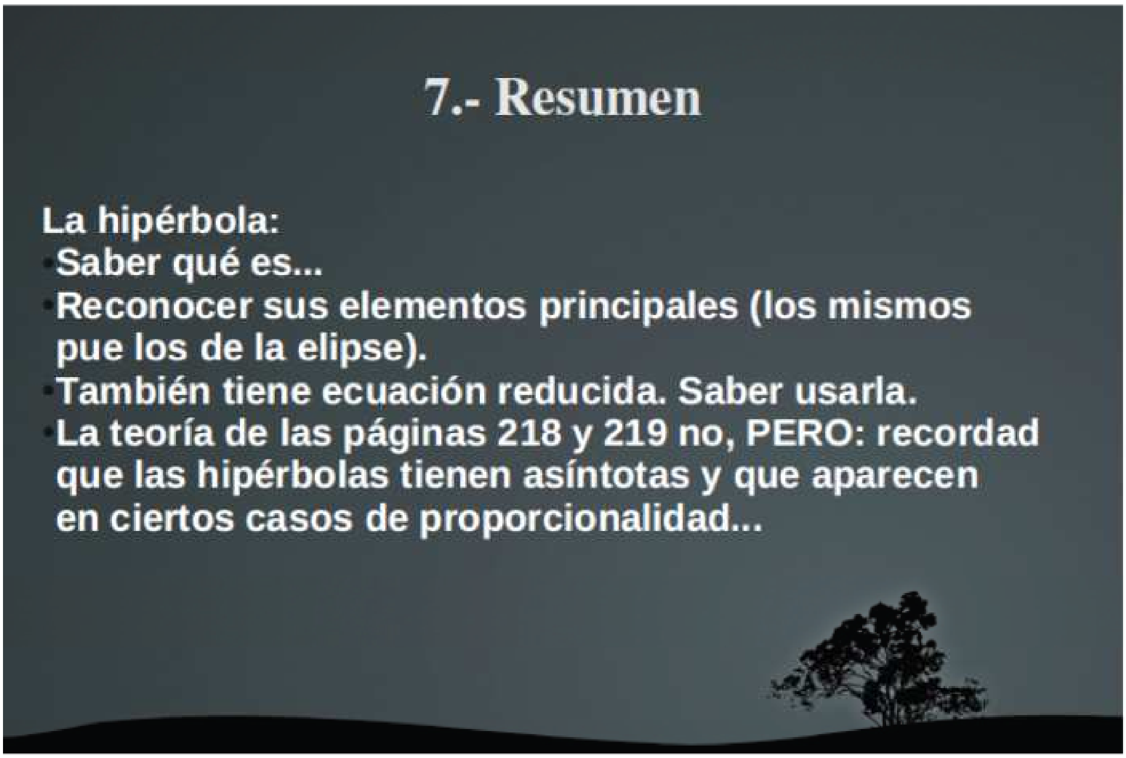
No os va a hacer falta casi ninguna fórmula. Si necesitáis, la tendréis escrita.
Quiero que entendáis el concepto, lo sepáis aplicar y lo hagáis bien y con seguridad. (vamos, que las cuentas no irán a pillar).

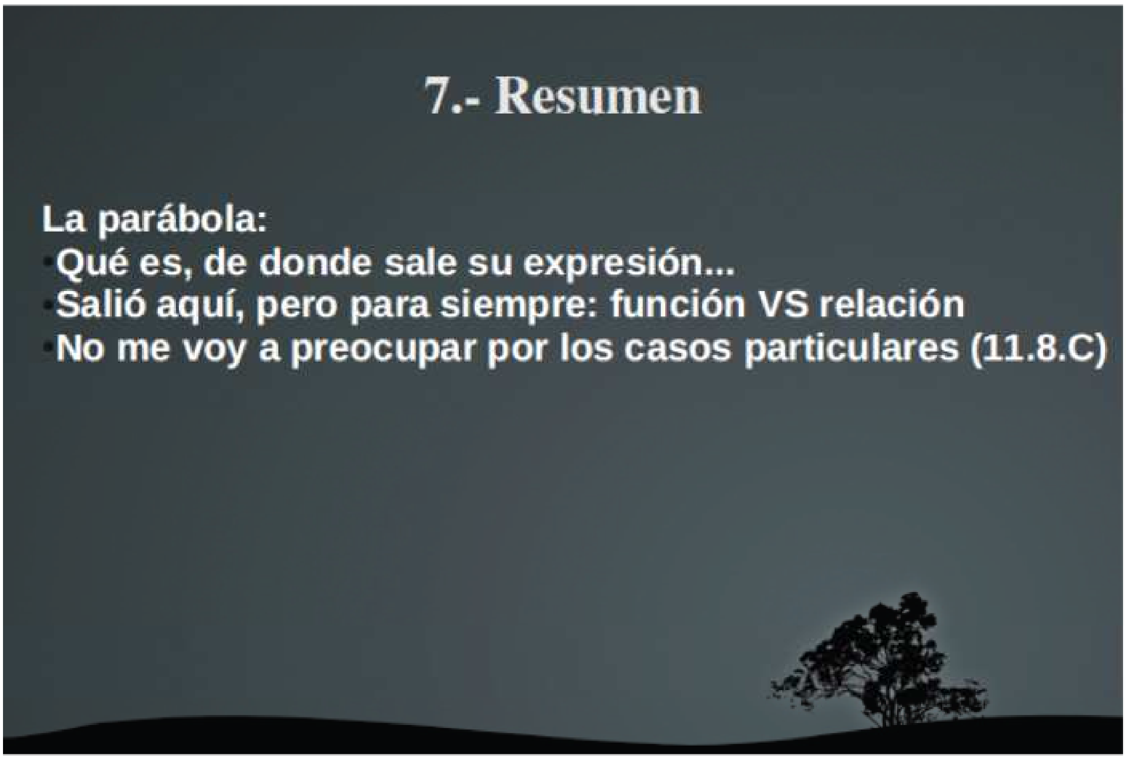
La importancia de dibujar y
la de pensar los pasos antes. Pero
El dibujo NO es la solución

7.- Resumen

La elipse:

- **Entender de donde sale y saber obtener su expresión.**
- **Reconocer en ella sus focos y elementos principales: a, b, c y los ejes.**
- **Trabajaremos con elipses centradas en el (0,0) y cuyos ejes coincidan con los de coordenadas.**
- **Que os 'suene' la ecuación reducida.**
- **Problemas tipo: como el 7 de la pag 223.**
- **11.6.D No**


7.- Resumen
La hipérbola:
•Saber qué es...
•Reconocer sus elementos principales (los mismos pue los de la elipse).
•También tiene ecuación reducida. Saber usarla.
•La teoría de las páginas 218 y 219 no, PERO: recordad que las hipérbolas tienen asíntotas y que aparecen en ciertos casos de proporcionalidad...


7.- Resumen
La parábola:
•Qué es, de donde sale su expresión...
•Salió aquí, pero para siempre: función VS relación
•No me voy a preocupar por los casos particulares (11.8.C)


7.- Resumen
Pero a mi esto de las aplicaciones, cortes... ¡si yo no voy a ir a ingeniería! Da igual, cuando menos te lo esperes...
Sagittal Plane
Coronal Plane
Transverse Plane
Body Planes
-radiologia.cl

C. Prueba corta para evaluar la comprensión por parte de los alumnos de la noción de lugar geométrico

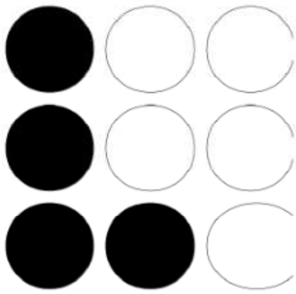
Se remarca antes que no se les realizó esta prueba por falta de tiempo. Puede resultar un tanto difícil pero los resultados a extraerse pueden ser de gran ayuda.

Test de lugares geométricos y cónicas. 1º Bachiller

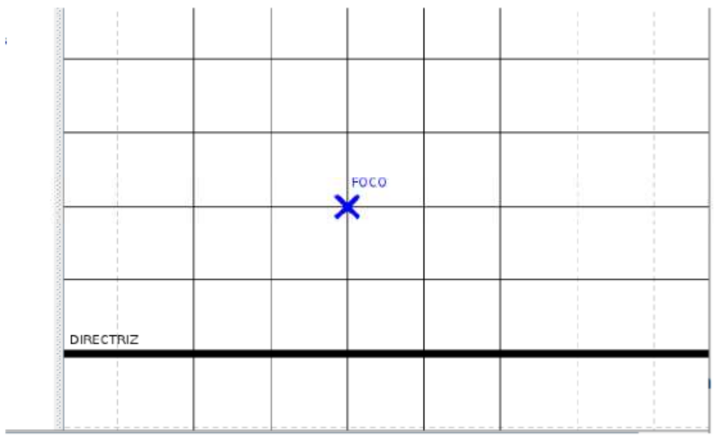
Nombre:________________________ Clase:_______ Número:_____

Fecha:________de_________de 2012 Colegio San Ignacio

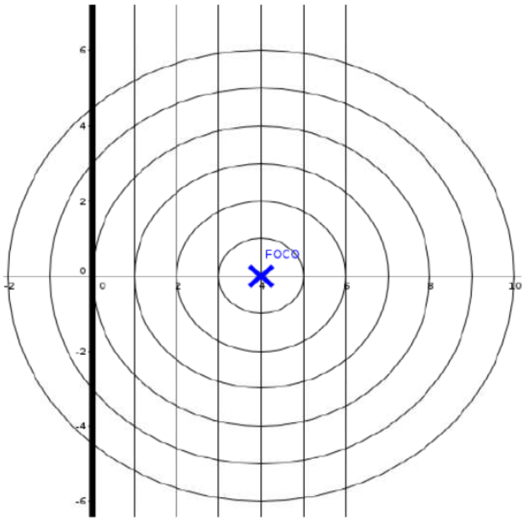
1. ¿Es un lugar geométrico? Contesta SÍ o NO
   a. En el plano, los puntos que están cerca del origen. SI NO
   b. En el plano, los puntos que se encuentran a 5 unidades del (2,1). SÍ NO
   c. En el siguiente dibujo, los puntos oscuros SÍ NO



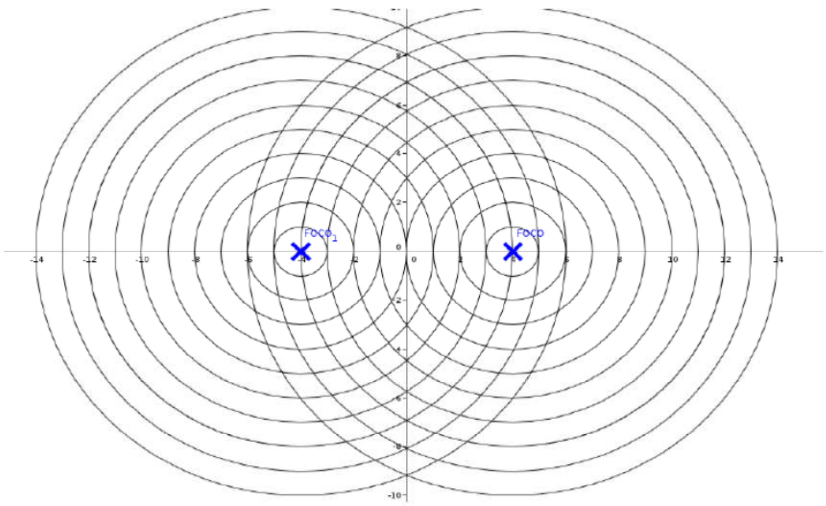
2. Dibuja **3** puntos de la parábola que tendría la directriz y el foco marcados. No necesitas ni regla ni compás. Márcalos con un punto gordo cada uno.



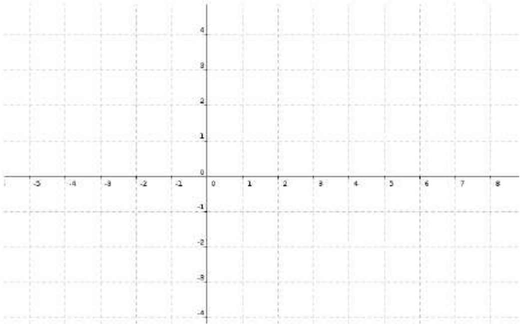
3. Nuevamente entendiendo por qué una **parábola** es un **lugar geométrico**, esboza la parábola en el dibujo que se proporciona debajo. Las rectas son paralelas a la directriz (línea en negrita) y las circunferencias concéntricas centradas en el foco.



4. Dados dos focos y una serie de circunferencias concéntricas en los mismos se pide esbozar la elipse. DATOS:
   - 2c = 8 (ver dibujo)
   - 2a = 10



5. Dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos ejes de coordenadas y da su ecuación.



Relación:

6. En el plano... (puedes dibujar pero solo interesa la respuesta)

   a. ¿Cuántos puntos equidistan de dos puntos? 1 2 infinitos

   b. ¿Cuántos puntos equidistan de dos rectas? 1 2 infinitos